Българска академия на науките * Bulgarian academy of sciences

Втори национален конгрес по теоретична и приложна механика
Second national congress on theoretical and applied mechanics

Варна, 8 - 14.X.1973, Varna * Книга /vol./ 1, 1975

ПРИБЛИЖЕНО РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА КРЪГОВОЦИЛИНДРИЧЕН ПРЪТ, НАМИРАЩ СЕ В БЕЗКРАЕН СЛОЙ ТЕЧНОСТ И НАТОВАРЕН С ТАНГЕНЦИАЛНА СЛЕДЯЩА СИЛА

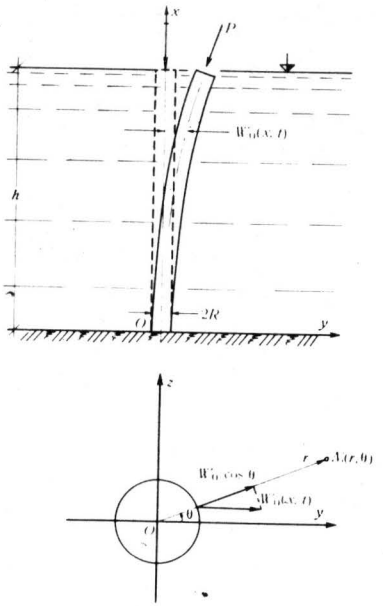
В.А.Джупанов, Х.И.Христов /България/

1. Задачата за устойчивост на кръговоцилиндричен прът, намиращ се в безкраен слой от течност и натоварен с тангенциална следяща сила, е неконсервативна и за решаването ѝ се прилага динамичният метод /1,2/. Търси се тази най-малка стойност на следящата сила, при която амплитудата на зададеното динамично смущение започва да расте. Тази стойност се нарича критична сила.

При решаване на задачата за потенциала на скоростите на течността, предизвикан от трептенията на пръта, се имат пред вид следните основни предпоставки: течността е безкраен /по r / пласт с дълбочина h , равна на височината на пръта, и е идеална, несвиваема и тежка; малките трептения на пръта предизвикват в течността вълни с малки амплитуди; прътът трепти по установен закон и формите му на трептене са зададени кинематически /1,3,4/:

/1/ $$w = W_0(x,t)\cos\theta = W(x)\cos\theta\, e^{i\Omega t}.$$

Когато прътът трепти сам в безкрайния слой течност, се налага да се реши следната гранична задача:



Фиг.1

/2/ $$\Delta\Phi = 0\ ,\ \Phi = \Phi(x,r,\theta;t),\ r = \sqrt{y^2+z^2},\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{z}{y},$$

/3/ $$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{x=0} = 0;$$ /4/ $$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{x=h} = 0,$$

/5/ $$\Phi(x,r,\theta;t) = \Phi(x,r,\theta+2\pi;t),$$

/6/ $$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

/7/ $$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + ik\Phi\right) = 0,$$

/8/ $$\lim_{r\to\infty}\Phi = 0\ ,\ \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0\ .$$

В тези изрази $\Phi(x,r,\theta;t)$ — е потенциалът на скоростите на течността; $(x,r,\theta;t)$ - координатната система, свързана с пръ-

та; g - земното ускорение; $W_0(x,t)$ - формата на малките трептения на пръта.

Така поставената задача е решена в /4/, но за свиваема течност и няма да се спираме подробно върху решението. За несвиваема течност при съответните означения се получава

$$/9/\quad \Phi(x,r,\theta;t)=i\Omega e^{i\Omega t}\cos\theta\left[\frac{L}{Q}\,\frac{H_1^{(2)}(kr)}{k\,\bar{H}_1^{(2)}(kR)}\,\mathrm{ch}\,kx+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{L_\varkappa}{Q_\varkappa}\,\frac{K_1(k_\varkappa r)}{k_\varkappa K_1'(k_\varkappa R)}\cos k_\varkappa x\right],$$

където

$$/10/\quad L=\int_0^h W(x)\,\mathrm{ch}\,x\,dx\ ,\quad Q=\int_0^h \mathrm{ch}^2 x\,dx,$$

$$/11/\quad L_\varkappa=\int_0^h W(x)\cos k_\varkappa x\,dx\ ,\quad Q_\varkappa=\int_0^h \cos^2 k_\varkappa x\,dx,$$

а k и $k_\varkappa$ са решения на уравненията

$$/12/\quad kg\,\mathrm{th}(kh)=\Omega^2\ ,\quad k_\varkappa g\,\mathrm{tg}(k_\varkappa h)=-\Omega^2.$$

От своя страна

$$/13/\quad \bar{H}_1^{(2)}(kR)=\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}\left[H_1^{(2)}(kr)\right]_{r=R},\quad K_1'(k_\varkappa R)=\frac{1}{k_\varkappa}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_1(k_\varkappa r)\right]_{r=R}.$$

Лесно е да се провери, че решението /9/ удовлетворява всички условия в граничната задача /2/ - /8/. Хидродинамичното налягане върху повърхността на пръта се дава от линеаризирания интеграл на Коши - Лагранж:

$$/14/\quad p=-\rho\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{r=R}.$$

Резултантата от това налягане по всяко сечение на пръта ще бъде

$$/15/\quad p_0=-R\int_0^{2\pi}\left[\rho\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{r=R}\cos\theta\,d\theta.$$

Ако за удобство бъде означено

$$/16/\quad G(x,r)=\frac{L}{Q}\,\frac{H_1^{(2)}(kr)}{k_1\bar{H}_1^{(2)}(kR)}\,\mathrm{ch}\,kx+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{L_\varkappa}{Q_\varkappa}\,\frac{K_1(k_\varkappa r)}{k_\varkappa K_1'(k_\varkappa R)}\cos k_\varkappa x,$$

то

$$/17/\quad p_0=-\pi\rho\,\Omega^2 R\,G(x,R)e^{i\Omega t}.$$

2. Хидродинамичното натоварване p_0 е комплексна величина. В случая уравнението за малките трептения на системата еластичен прът - течност ще бъде

$$/18/\quad EJ\frac{\partial^4 W_0(x,t)}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 W_0(x,t)}{\partial t^2}=p_0$$

при гранични условия

$$/19/\quad W_0(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}W_0(0,t)=EJ\frac{\partial^2}{\partial x^2}W_0(h,t)=EJ\frac{\partial^3}{\partial x^3}W_0(h,t)=0.$$

Вижда се впрочем, че след отчитане на хидродинамичното налягане уравнението за трептенията на пръта става нееднородно. Решаването на това уравнение е свързано със сравнително големи трудности. За да бъдат избягнати те, трябва да се усредни p_0 и да се получи хомогенно уравнение с постоянни коефициенти. За целта може да се използува концепцията за равномерно разпределените присъединени маси /3/. В /3/ е предложена следната формула за намиране на присъединената маса:

$$/20/\quad m_{пр}=\rho R\,\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^h\left[\Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]_{r=R}d\theta\,dx}{\int_0^h \dot{W}_0^2(x,t)\,dx}.$$

Като се използуват изразите за величините, участвуващи тук, и се отчете, че $m_{пр}$ е комплексна величина, се получава

$$/21/\quad m_1+i\,m_2=-\pi\rho\Omega^2R^2\,\frac{\frac{L^2}{Q}\,\frac{H_1^{(2)}(kR)}{kR\bar{H}_1^{(2)}(kR)}+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{L_\varkappa^2}{Q_\varkappa}\,\frac{K_1(k_\varkappa R)}{k_\varkappa R K_1'(k_\varkappa R)}}{\frac{L^2}{Q}+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{L_\varkappa^2}{Q_\varkappa}}.$$

Поради наличието на имагинерна част в присъединената маса

$$/22/ \quad p_0=-(m_1+im_2)\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}=-m\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}+\Omega m_2\frac{\partial W_0}{\partial t},$$

т.е. умножена на Ω, m_2 образува коефициента пред $\dot{W}_0$, който характеризира дисипацията на енергията за вълнообразуване. Затова някои автори /1,3,4/ наричат Ωm_2 присъединено вискозно триене.

Впрочем задачата за определяне на критичната сила се свежда до решаването на уравнението

$$/23/ \quad W^{IV}(\xi)+2q\,W^{II}(\xi)-\omega^2(1+i\delta)W(\xi)=0,$$

където

$$/24/ \quad \xi=\frac{x}{h},\ 2q=\frac{Ph^2}{EJ},\ \omega^2=\Omega^2\frac{(m+m_1)h^4}{EJ},\ \delta=\frac{m_2}{m+m_1}$$

при гранични условия

$$/25/ \quad W(0)=W'(0)=W''(1)=W'''(1)=0.$$

Общият интеграл на /23/ е

$$/26/ \quad W(\xi)=C_1e^{\alpha_1\xi}+C_2e^{\alpha_2\xi}+C_3e^{\alpha_3\xi}+C_4e^{\alpha_4\xi},$$

където

$$/27/ \quad \begin{aligned}\alpha_1=-\alpha_3&=\sqrt{-q+\sqrt{q^2+\omega^2(1+\delta i)}}=\lambda_1+i\lambda_2,\\ \alpha_2=-\alpha_4&=\sqrt{-q-\sqrt{q^2+\omega^2(1+\delta i)}}=\lambda_3+i\lambda_4.\end{aligned}$$

Числата $\lambda_1 \div \lambda_4$ са получени чрез точно коренуване на изразите за α_1 и α_2 и са реални.

3. След удовлетворяването на граничните условия /25/ се получава система от четири уравнения с четири неизвестни /константите $C_1 \div C_4$ /, която е хомогенна и за да съществува ненулево решение, трябва главната ѝ детерминанта да бъде нула:

$$/28/ \quad \Delta=(\alpha_1\alpha_2^3+\alpha_1^3\alpha_2)\,\mathrm{sh}\,\alpha_1\,\mathrm{sh}\,\alpha_2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\,\mathrm{ch}\,\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_2+\alpha_1^4+\alpha_2^4=0.$$

Би могло да се провери, че при $\delta=0$ числата α_1 и α_2 стават реални и /28/ се превръща точно в уравнението на М.Бек, К.С.Дейнеко и М.Я.Леонов, дадено в /1/.

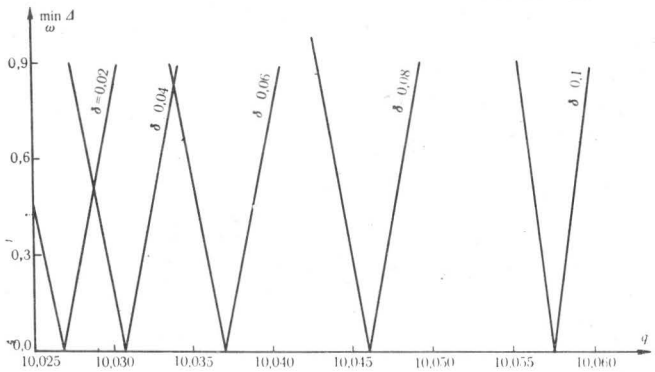
Всъщност Δ е комплексно число $\Delta=\Delta_1+i\Delta_2$ и уравнение /28/ трябва да добие вида

$$/29/ \quad \mathrm{mod}\,\Delta=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2}=0.$$

Основната разлика между задачите за устойчивост на натоварен със следяща сила прът във вакуум и в течност е, че в първия случай не се отчита дисипация на енергията. Затова при всички стойности на силата, по-малки от критическата, съществува установен процес на трептене. При включване на дисипация установен процес на трептене има само за една стойност на следящата сила - критичната. При по-малки стойности процесът е затихващ, а при по-големи - разходящ. При $\delta=0$ /във вакуум/ първите два корена за ω се сближават при нарастването на q, а когато q стане точно равно на критичната сила, те се сливат в един двоен корен. При по-нататъшното увеличаване на q единият става комплексен с отрицателна имагинерна част, което показва, че процесът е вече разходящ. При $\delta\neq 0$ /има дисипация/ уравнение /29/ има реални корени за ω само за $q=q^*$, т.е. $\mathrm{mod}\,\Delta=0$ само при критичната сила и $\mathrm{mod}\,\Delta>0$ при всички останали стойности.

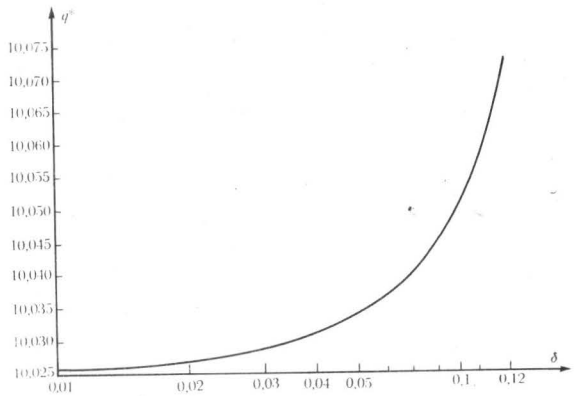
Корените на /29/ са намерени на ЦЕИМ "Минск-22", за която бе направена програма на езика МИД-2 /5/. При $\delta=0$ за Δ_1 бе получено, че съвпада със стойностите на съответния израз у М.Бек, К.С.Дейнеко и М.Я.Леонов, а $\Delta_2\approx 10^{-4}$, което може да се приеме $\Delta_2=0$, а за критичната сила се получи $q^*=10{,}025$, което напълно съвпада с известните резултати. Това ни дава известни основания да предполагаме, че програмата е съставена точно.

Задачата за решаване на /29/ при $\delta\neq 0$ е задача за минимизиране на функция. Затова при зададен параметър δ и различни стойности на q е пресмятано $\min\Delta(\omega)$. Това q , за



Фиг.2

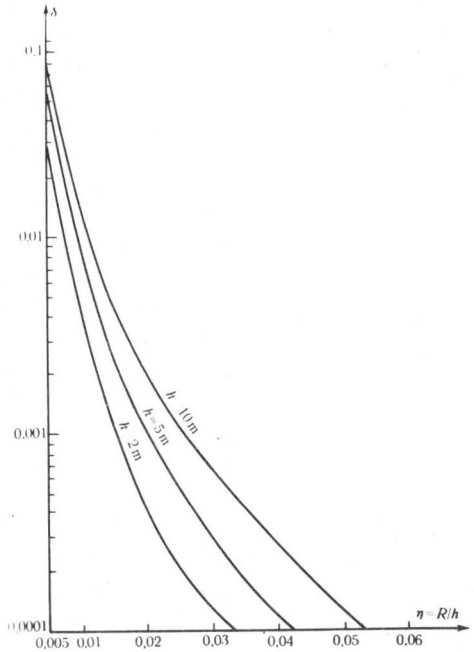
което $\min\Delta(\omega)$ е най-малко и се различава от нулата най-много с 0,005, е критичната стойност на силата. На фиг.2 е показано поведението на $\min\Delta(\omega)$ за различни стойности на δ. Накрая на фиг.3 е показана зависимостта на критичната стойност на силата q^* от δ. Когато трябва да се намери критичната стойност в течност, трябва да се намерят m_1 и m_2 от /21/, а от тях и δ.



Фиг.3

При пресмятането на m_1 и m_2 е използувана хипотезата, че формите на трептене малко се променят във вода в сравнение с тези във вакуум. При такова предположение може да се разделят хидродинамичната и еластичната задача. Предполагайки, че прътът трепти в течност, както и във вакуум, използуваме формите на трептене във вакуум и от тях чрез /21/ намираме присъединените маси. На фиг.4 е показана зависимостта на δ от параметрите на пръта /височина, отношение $\eta=\frac{R}{h}$/. Имайки данните на пръта, от фиг.4 се отчита параметърът δ, а след това от фиг.3 - съответно критичната стойност на силата.

Окончателният извод е, че устойчивостта на пръта нараства, когато се отчита влиянието на течността.



Фиг.4

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. Пановко, Я.Г., И.И.Губанова. Устойчивость и колебания упругих систем. М., Наука, 1964.

3. Шейнин, И.С. Колебания конструкций гидротехнических сооружений в жидкости. Л., Энергия, 1967.
4. Джупанов, В.А. Теорет. и прил. механика, 1971, 3.
5. Бърнев, П., Д. Тошков. Инструкция за ползуване на системата за символично програмиране за машината "Минск-22". Изд. на МИ с ИЦ при БАН, 1967.