

Напълно развито течение на вискозен несвиваем флуид в тороидална тръба с кръгово сечение

Запрян Запрянов, Христо Христов

Въведение

Изкривени конфигурации от кръгови тръби, по които се движат нютониви или ненютониви флуиди, се срещат много често в практиката. Съществуването на вторично течение, което е нормално на течението по оста на изкривените тръби, води в определени ситуации до някои преимушества в сравнение с правите тръби. Например вторичното течение в сеченията на кривите тръби може да служи като полезен механизъм за увеличаване в сравнение с правите тръби на скоростите за транспортиране на флуидни частици към стените на тръбите, което ускорява топло-масообменните процеси, намалява поляризацията на концентрацията, усилва възможностите за обратна осмоза и т. н. Наред с другите мисгобройни приложения тороидалните тръби се използват и в някои химически реактори, в ракетната техника и др.

Първите експериментални работи за изследване движението на флуид в изкривени тръби се появяват в началото на двадесетия век [1, 2, 3]. Пионер в теоретическите изследвания в тази област е Дийн [4, 5], който откри основния закон за подобие, определящ от какво зависи движението на флуид в тороидална тръба с кръгово сечение. Получило по-късно неговото име, числото на Дийн D е равно на $4 \cdot Re \sqrt{\frac{2a}{L}}$, където Re е числото на Рейнолдс за течението по тръбата, a — радиусът на кръговата тръба и L — радиусът на кривината на оста на тора. Физически този параметър може да се разглежда като отношение от центробежните сили, породени от кръговото движение и вискозните сили на флуида. Класическото аналитично решение на Дийн, което е валидно само за малки D , дава добро приближение за вторичното течение и не предсказва повишаване на съпротивлението в сравнение с права тръба. Трудел и Адлер [6] извършват числено решение на уравненията на Навие—Стокс за движение на флуид в тороидална тръба, но техният числен метод става неустойчив при $D > 200$. В 1963 г. Баруа [7] дава асимптотично решение на задачата за много големи D . Използвайки съответно релаксационния метод и метода на крайните разлики, Аустин [8] и Гринспен [9] дават също числени решения на стационарната задача за движение на флуид в тороидална тръба. Подобрене на решението (9) е извършено от Колинс и Денис в [10].

В настоящата работа на основата на метода на променливите направления тази задача се решава числено. С малки изменения в числената реализация този метод дава възможност лесно да се премине и към решаването на съответната нестационарна задача.

§ 1. Формулиране на задачата. Апроксимация

Да разгледаме нютонен вискозен поток в тороидална тръба с кръгово сечение и радиус a . На фиг. 1 е начертана тороидална координатна система. Точката M в едно сечение на тора се локализира чрез полярните координати (r, φ) , а самото напречно сечение чрез ъгъл θ . Радиусът на кривината на тора е означен с L . На координатите (r, φ, θ) съответствуват следните компоненти на скоростта (u, v, w) . Отношението $\frac{a}{L}$ ще считаме малко и ще разглеждаме течението в онази част от тръбата, където течението е напълно развито, т. е. не зависи от θ . Записани в термините на функцията на тока χ , вихъра ζ в равнината на напречното сечение и надлъжната скорост w в обезразмерен вид, уравненията на Навие—Стокс имат вида

$$(1) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left(r w \frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi + w \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} \beta \nabla^2 \zeta,$$

$$(2) \quad \nabla^2 \chi = -\zeta,$$

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = D + \frac{1}{2} \beta^2 \nabla^2 w + \cos t.$$

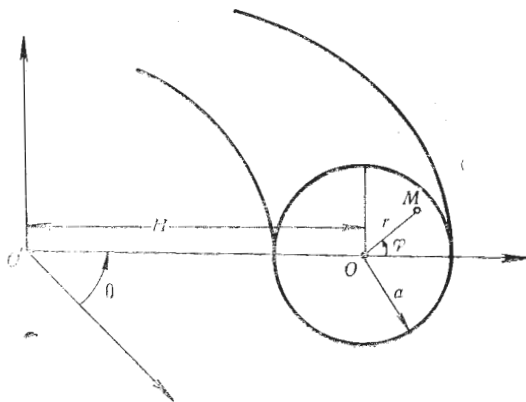
Тук $\varepsilon^2 = \frac{\bar{w}^2}{La\omega^2}$, $\beta = \frac{2\nu}{a^2\omega}$, където \bar{w} е характерната скорост по посока на тръбата, ν е кинематичният вискозитет на флуида и ω е честотата на синусоидалното колебание на налягането

$$-\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) = G + \bar{w} \omega \cos \omega t.$$

Тази система от три частни диференциални уравнения от елиптичен тип се решава при гранични условия

$$(4) \quad w = \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1$$

и условието за ограниченост на решението при $r=0$.



Фиг. 1

При решаването на поставената задача ще използваме факторизираната схема на метода на променливите направления [11], или, както още се именува, „метод на дробните стъпки“. Уравненията (1—3) ще апроксимираме със следната система:

Уравнението за вихъра

$$(5) \quad \frac{\bar{\zeta}_{i,j} - \zeta_{i,j}^n}{\tau_1} = \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i,j+1}^{n,p} - \chi_{i,j-1}^{n,p}}{2l} \cdot \frac{\bar{\zeta}_{i+1,j} - \bar{\zeta}_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\zeta}_{i+1,j} - 2\bar{\zeta}_{i,j} + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\zeta}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i+1,j}^{n,p} - \chi_{i-1,j}^{n,p}}{2h} \cdot \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2l} + \frac{1}{2} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{r_i^2 l^2} + \frac{1}{r_i} \omega_{i,j}^{n+1} \left(r_i \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \sin \varphi_j + \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \cos \varphi_j \right).$$

Тук $\zeta_{i,j}^n$ са стойностите на ζ от предишния временен слой, а $\bar{\zeta}_{i,j}$ са стойностите на ζ на междинния по времето слой. Индексите i и j са съответно по направленията r и φ , като стъпката по r е h , по φ — l и по времето τ_1^* .

Избираме $h = \frac{1}{M-1}$ и $l = \frac{\pi}{N-1}$, където M е броят на точките по r , а N — броят на точките по φ . Така цялата област има $M \times N$ точки. Индексът n е по времето (указва номера на временния слой), а p е итерационен параметър за функцията на тока

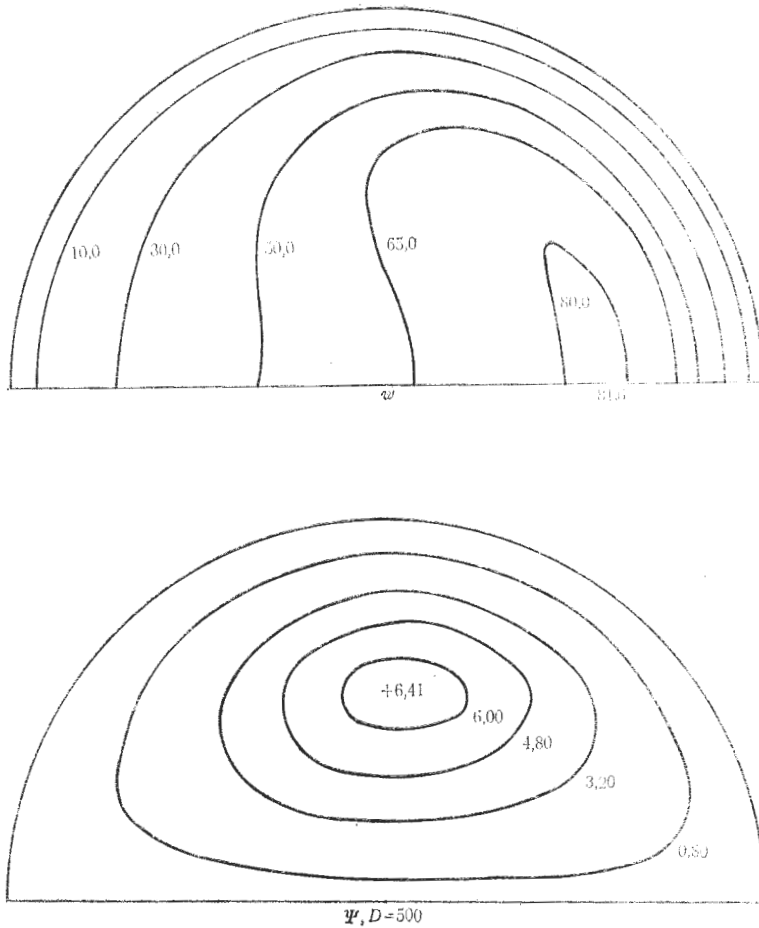
$$(6) \quad \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \bar{\zeta}_{i,j}}{0,5\tau} = \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i+1,j}^{n,p} - \chi_{i-1,j}^{n,p}}{2h} \cdot \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{2l} + \frac{1}{2} \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i,j+1}^{n,p} - \chi_{i,j-1}^{n,p}}{2l} \cdot \frac{\bar{\zeta}_{i+1,j} - \bar{\zeta}_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\zeta}_{i+1,j} - 2\bar{\zeta}_{i,j} + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\zeta}_{i-1,j}}{h^2} - \omega_{i,j}^{n+1} \left[\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \sin \varphi_j + \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2r_i l} \cos \varphi_j \right].$$

Уравнението за функцията на тока апроксимираме така

$$(7) \quad \frac{\bar{\chi}_{i,j} - \chi_{i,j}^{n,p}}{\tau_1} = \frac{\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\chi}_{i+1,j} - 2\bar{\chi}_{i,j} + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) \bar{\chi}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{1}{2} \zeta_{i,j}^{n+1}$$

$$(8) \quad \frac{\chi_{i,j}^{n,p+1} - \bar{\chi}_{i,j}}{\tau_1} = \frac{\chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}}{r_i^2 l^2} + \frac{1}{2} \zeta_{i,j}^{n+1}.$$

Тук τ_1 е итерационен параметър. Уравнението $\nabla^2 \chi = -\zeta$ заменяме с уравнението $\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \nabla^2 \chi + \zeta$. Понеже граничните условия са стационарни, при $\tau \rightarrow \infty$ решението на последното уравнение клони към решението, което ни интересува, т. е. решаваме новото уравнение до установяване. След като получим $\hat{\chi}$, се връщаме с него като χ и намираме отново $\hat{\chi}$ и т. н. Стойностите на ζ са от новия временен слой. Така получаваме стойностите на χ върху новия временен слой, които, както се вижда от (6), са необходими в уравнението за вихъра. Без квазилинеаризация това не е възможно, затова на този въпрос ще се спрем по-долу.

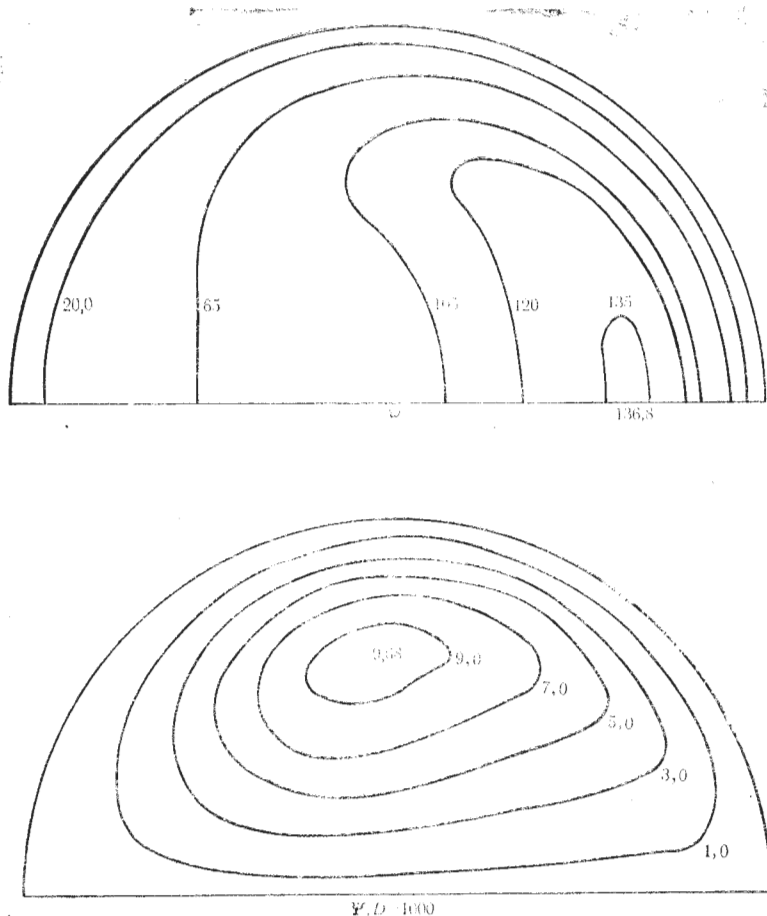


Фиг. 2

Уравнението за надлъжната компонента на скоростта w апроксимираме по следния начин:

$$(9) \quad \frac{\bar{w}_{i,j} - w_{i,j}^n}{0,5\tau} = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) \bar{w}_{i+1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) \bar{w}_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i,j+1}^{n,p} - \chi_{i,j-1}^{n,p}}{2l} \cdot \frac{\bar{w}_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{2} \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{r_i^2 l^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i+1,j}^{n,p} - \chi_{i-1,j}^{n,p}}{2h} \cdot \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2l} + D,$$

$$(10) \quad \frac{w_{i,j}^{n+1} - \bar{w}_{i,j}}{0,5\tau} = \frac{1}{2} \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j-1}^{n+1}}{r_i^2 l^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\chi_{i,j+1}^{n,p} - \chi_{i,j-1}^{n,p}}{2l} \cdot \frac{\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \cdot \frac{\chi_{i+1,j}^{n,p} - \chi_{i-1,j}^{n,p}}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) \bar{w}_{i+1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) \bar{w}_{i-1,j}}{h^2} + D.$$



Фиг. 3

Поради естеството на задачата функциите ζ и χ са антисиметрични относно Ox , а w е симетрична (вж. фиг. 2,3). Затова в полярни координати ще решаваме задачата в областта $\varphi \in [0, \pi]$ и $r \in [0, 1]$. Тогава от $\zeta(r, \varphi) = -\zeta(r, -\varphi)$ и $\zeta(r, \pi - \varphi) = -\zeta(r, \varphi - \pi)$ следва съответно, че $\zeta(r, 0) = 0$ и $\zeta(r, \pi) = 0$. За χ получаваме аналогично $\chi(r, 0) = 0$ и $\chi(r, \pi) = 0$. От симетрията за w получаваме $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)_{0, \pi} = 0$.

В такъв случай

$$(11) \quad \zeta_{i,0} = \zeta_{i,N} = \zeta_{1,j} = 0; \quad \chi_{i,0} = \chi_{i,N} = \chi_{1,j} = 0;$$

$$(12) \quad w_{M,j} = 0 \quad (12^a); \quad \chi_{M,j} = 0 \quad (12^b)$$

Условието, $\frac{\partial \chi}{\partial r} = 0$ при $r=1$, записано с точност до втори порядък, дава

$$\frac{-3\chi_{M,j} + 4\chi_{M-1,j} - \chi_{M-2,j}}{2h} = 0.$$

Но $\chi_{M,j} = 0$, следователно

$$(13) \quad \chi_{M-1,j} = \frac{i}{4} \chi_{M-2,j}$$

Уравненията за χ записваме не в цялата област, а една стъпка навътре от границата $r=1$, като предпоследния ред изчисляваме по горните формули. Така удовлетворяваме и двете условия за χ по границата $r=1$. За вихъра ζ използваме условието

$$(14) \quad \zeta_{M,j} = -2 \frac{\chi_{M-1,j}}{h^2}$$

Като апроксимираме с точност до втори порядък условието $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получаваме

$$(15) \quad -3\omega_{1, \frac{N+1}{2}} + 4\omega_{2, \frac{N+1}{2}} - \omega_{3, \frac{N+1}{2}} = 0.$$

Условието $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ дава

$$(16) \quad \begin{aligned} -3\omega_{i,N} + 4\omega_{i,N-1} - \omega_{i,N-2} &= 0, \\ -3\omega_{i,1} + 4\omega_{i,2} - \omega_{i,3} &= 0. \end{aligned}$$

§ 2. Решаване на алгебричните системи: резултати от решението на стационарната задача

Пресмятанията започваме с ω . Най-напред правим една стъпка по физическото време τ , като решаваме системата (9) с условията (15) и $\omega_{M,j} = 0$. След това решаваме системата (10) с условия (16) и се допълва отново

$$(17) \quad \omega_{1,j} = 4\omega_{2, \frac{N+1}{2}} - \omega_{3, \frac{N+2}{2}}$$

Така за ω е извършена цяла стъпка по времето. С полученото ω^{n+1} решаваме системата (5) с условията $\zeta_{1,j} = 0$ и (10), а след това системата (6) с условията $\zeta_{i,0} = \zeta_{i,N} = 0$. По-нататък с полученото ζ^{n+1} извършваме една стъпка по фиктивното време τ_1 в уравненията за χ , като решаваме системата (7) с условията $\chi_{1,j} = 0$ и (13), а системата (8) с условията $\chi_{1,0} = \chi_{i,N} = 0$ и $\chi_{M-1,j} = \frac{i}{4} \chi_{M-2,j}$. С така полученото $\chi^{n,p}$ отново се връщаме в уравненията за ω и ζ и пак извършваме същата стъпка по физическото време, като използвайки ζ^{n+1} и ω^{n+1} , пресмятаме $\chi^{n,p+1}$. Този процес продължава, докато

$$(18) \quad \max_{i,j} \left| \frac{\chi^{n,p'+1} - \chi^{n,p'}}{\chi^{n,p'+1}} \right| < \delta,$$

където δ е малко число, например 10^{-4} . Когато удовлетворим (18), смятаме, че сме направили окончателно една стъпка по времето и търсените резултати на този временен слой за функциите ω , ζ и χ са съответно ω^{n+1} , ζ^{n+1} и $\chi^{n+1,p'}$. По-нататък постъпваме аналогично. Този алгоритъм бе програмиран на машината R-10-40. Засега авторите разполагат само с резултати от пресмятанията за стационарната задача. При нея по описания по-горе метод се правят толкова стъпки по физическото време, колкото са нужни, за да имаме

$$\max_{t,f} \left| \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\omega^{n+1}} \right| < \delta,$$

$$\max_{t,f} \left| \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\zeta^{n+1}} \right| < \delta.$$

В стационарния случай, разбира се, събираемостта cost в уравнението (3) не участва. На фиг. 2 и 3 са дадени кривите на еднаквите стойности на скоростта ω по направление на оста на тръбата и функцията на тока χ съответно при числа на Дийн 500 и 1000 за стационарната задача. С растежето на числото на Дийн D в получените числени резултати се очертава тенденция за образуване на централно ядро в тръбата, където ефектите на вискозността силно намаляват. Линиите на постоянните стойности на ω стават почти успоредни върху централната част на тръбата и измененията на ω започват да зависят само от разстоянието до оста на симетрия на сечението. Освен това при големи D разпределението на скоростта в тръбата силно се влияе от вторичното сечение, причинено от центробежните сили, като ω приема по-големи стойности откъм външната стена на тръбата.

Постъпила на 20. X. 1976 г.

Литература

1. Grindley, J. H. & Gibson. On the frictional resistance to the flow of air through a pipe. — Proc. Roy. Soc., A80, 1908.
2. Eustice, J. Flow of water in curved pipes. — Proc. Roy. Soc., A84, 1910.
3. Eustice, J. Experiments of stream-line motion in curved pipes. — Proc. Roy. Soc., A84, 1911.
4. Dean, W. R. Note on the motion of fluid in curved pipe. — Phil. Mag. Ser., 7, 4, 1927.
5. Dean, W. R. The stream-line motion of fluid in a curved pipe. — Phil. Mag. Ser., 7, 5, 1928.
6. Truesdell, L. C., R. J. Adler. Numerical treatment of fully developed laminar flow in helically coiled tubes. — AIChE J., 16, 1970.
7. Barna, S. N. On secondary flow in stationary curved pipes. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 16, 1963.
8. Austin, L. R. The development of viscous flow within helical coils. Ph. D. thesis, Univ. Utah, 1971.
9. Greenspan, P. Secondary flow in a curved tube. — J. Fluid Mech., 57, 1973.
10. Collins, W. M., S. C. Dennis. The steady motion of a viscous fluid in a curved tube. — Q. J. Mech. Appl. Math., vol. XXVIII, 1975, 2.
11. Яценко, Н. П. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.