МЕХАНИКА 77 MECHANICS
ТРЕТИ КОНГРЕС THIRD CONGRESS
ВАРНА 13—16. IX VARNA

НАПЪЛНО РАЗВИТО ТЕЧЕНИЕ НА ВИСКОЗЕН НЕСВИВАЕМ ФЛУИД В ТОРОИДАЛНА ТРЪБА С КРЪГОВО СЕЧЕНИЕ

З.Запрянов, Хр.Христов, Е.Тошев

Проблемът за характера на движението на вискозен флуид в тороидални тръби представлява голям интерес както за теорията така и за практиката. Наличието на кривина в тръбите води до поява на центробежни сили, които от своя страна пораждат вторично течение, нормално на основното течение по направление на оста. Това в определени ситуации води до някои преимущества на изкривените пред правите тръби. Така например, вторичното течение в сеченията на кривите тръби често се използува като полезен механизъм за увеличаване скоростите на транспортиране на флуидни частици към стените на тръбите, за ускоряване на топлообменните процеси и намаляване поляризацията на концентрацията.

Тороидалните тръби се използуват и за увеличаване на масообменната скорост в мембранните кръвни оксигенатори и изкуствените бъбреци, имат голямо приложение в химическите реактори, ракетната техника и др. Важно приложение на теченията в тороидални тръби е и моделирането на биологични обекти. За разлика от инженерните задачи, където главният проблем е да се определят хидродинамичните загуби в зависимост от кривината на тръбата, при биомеханичните модели е необходима пълна информация за разпределението на скоростите. Въз основа на поведението на флуид в тороидална тръба са направени модели на течението на кръвта в кръвоносната система.

Първите експериментални изследвания върху проблема са направени от Гриндлей и Гибсон [1], а първото теоритично изследване е направено от Дийн [2,3]. Той показа, че хидродинамичното подобие на течението зависи само от един безразмерен параметър $K = 2Re\,a/L$, където Re е числото на Рейнолдс, a - радиуса на тръбата, а L - радиуса на кривината на тора. Физическият смисъл на този безразмерен параметър е свързан с отношението на центробежните към вискозните сили. Процесът на преминаване към напълно развито течение в тороидални тръби с кръгово сечение от началното течение в прави тръби е бил изучен от Хауторн [4]. Баруа [5] дава асимптотично решение на задачата за началния участък на движението на флуид в крива тръба за големи числа на Дийн. Олсон [6] изследва експериментално началния участък на движението на флуид в крива тръба. В [7] Синг, използувайки метода на срастване на асимптотическите разположения прави анализ на входния участък на течение в тороидална тръба при постоянен пулсиращ градиент на налягането. Тази работа е пряко свързана с моделиране движението на кръвта в аортата.

Има и редица работи върху напълно развити течения на несвиваем вискозен флуид в тороидални тръби. Труседел и Адлер [8] извършват числено решаване на уравненията на Навие-Стокс за течение на флуид в тороидална тръба, но тяхния числен метод става неустойчив при $De > 200$. Използувайки съответно релаксационен метод и метод на Гаус-Зайдел, Аустин [9] и Грийнспен [10] получават също числени решения на уравнението на Навие-Стокс за движение на флуид в тороидална тръба за големи числа на Дийн. Подобрение на резултатите в работа [10] е дадено от Колинс и Денис в [11].

В настоящата работа тази задача се решава като се използува метода на променливите направления и метода на дробните стъпки [12], което води до някои преимущества в численото решаване. Техниката, приложена в [13] се използува като е направена корекция на граничните условия за вихъра посредством метода на долната релаксация.

Да разгледаме течение на вискозен флуид в тороидална тръба с кръгово напречно сечение. Нека е дадена тороидална координатна система $/\tau, \varphi, \theta/$ / фиг.1 /, където L е радиусът на кривината на тора и a е радиусът на сечението на тора. Уравненията на Навие-Стокс, записани посредством функцията на тока ψ , вихъра ζ в напречното сечение и надлъжната компонента на скоростта W имат вида:

1/ $\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\varepsilon^2}{\tau}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right) + \dfrac{1}{\tau}\left(\tau W \dfrac{\partial W}{\partial \tau}\sin\varphi + W\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) = \dfrac{1}{2}\beta^2 \nabla^2 \zeta$

2/ $\nabla^2 \psi = -\zeta$

3/ $\dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\varepsilon^2}{\tau}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial W}{\partial \tau} - \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}\cdot\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\right) = De + \dfrac{1}{2}\beta^2\nabla^2 W + \cos t$

Тук $De = 4Re\sqrt{2a/L}$, $\varepsilon^2 = \bar{W}^2/La\omega$, $\beta = 2\nu/a^2\omega$, където De е модифицираното число на Дийн, $\bar{W}$ е характерна надлъжна скорост, ν е кинематичния вискозитет и ω е честотата на синусоидалното колебание на налягането. Градиентът на налягането има вида:

$$-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) = G + W_0 \cos\omega t$$

Тази система от три частни диференциални уравнения се решава при гранични условия $W = \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$ при $\tau = 1$ и условие за ограниченост на решението при $\tau = 0$.

За намиране на скоростните профили за напълно развито течение на вискозен несвиваем флуид с постоянен градиент на налягането $-\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) = G$ се извършва решаване на горната система частни диференциални уравнения, като се използува метода на установяване на решенията. Уравнението на функцията на тока заменяме с уравнението:

4/ $\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla^2 \psi + \zeta$

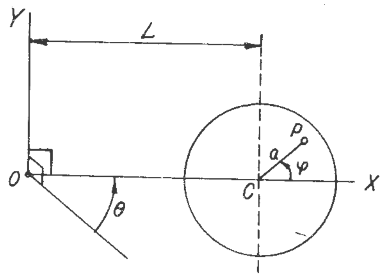
Тъй като граничните условия са стационарни, то при $\tau \to \infty$ / т.е. итерационен параметър без определен физически смисъл / решението на последното уравнение клони към решението на уравнението, което ни интересува. Понеже уравненията на Навие-Стокс са нелинейни, то за да може да се приложи метода на променливите направления най-напред извършваме линеаризация на уравненията. Да обозначим с $\zeta^{(i)}$, $\psi^{(i)}$, $W^{(i)}$ съответно стойностите на вихъра, функцията на тока и надлъжната компонента на скоростта на i -тата итерация. Тогава линеаризираните уравнения на Навие-Стокс записваме във вида:

5/ $\dfrac{\partial \zeta^{(i+1)}}{\partial t} - \dfrac{\varepsilon^2}{\tau}\left(\dfrac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \tau}\dfrac{\partial \zeta^{(i+1)}}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \zeta^{(i+1)}}{\partial \tau}\right) - \dfrac{1}{\tau}\left(\tau W^{(i)}\dfrac{\partial W^{(i)}}{\partial \tau}\sin\varphi + W^{(i)}\dfrac{\partial W^{(i)}}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) = \dfrac{1}{2}\beta^2\nabla^2\zeta^{(i+1)}$

6/ $\dfrac{\partial \psi^{(i+1)}}{\partial \tau} = \nabla^2\psi^{(i+1)} + \zeta^{(i+1)}$

7/ $\dfrac{\partial W}{\partial t} - \dfrac{\varepsilon^2}{\tau}\left(\dfrac{\partial \psi^{(i+1)}}{\partial \tau}\dfrac{\partial W^{(i+1)}}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial \psi^{(i+1)}}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial W^{(i+1)}}{\partial \tau}\right) = De + \dfrac{1}{2}\beta^2\nabla^2 W^{(i+1)} + \cos t$

По-нататък дискретизацията на вече линеаризираните уравнения извършваме по схемата, дадена в [13] . Поради естеството на задачата функциите Ψ и ζ са антисиметрични относно оста Ox, а W е симетрична / фиг.1 /.



Фиг. 1

Поради това задачата се решава в област, зададена в полярни координати $\varphi \in [0, \Pi]$, $\tau \in [0, 1]$. От това, че $\zeta(\tau,\varphi) = -\zeta(\tau,-\varphi)$, $\zeta(\tau, \Pi-\varphi) = -\zeta(\tau, \varphi-\Pi)$ следва, че $\zeta(\tau,0) = 0$, $\zeta(\tau,\Pi) = 0$. За Ψ получаваме аналогично: $\Psi(\tau,0)=0$, $\Psi(\tau,\Pi)=0$. За W имаме: $\frac{\partial W}{\partial \tau} = 0$ при $\varphi = \frac{\Pi}{2}$ и $\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$ при $\varphi = 0, \Pi$.

По такъв начин дискретизираните гранични условия могат да се запишат във вида:

8/ $\zeta_{i,1} = \zeta_{i,N} = \zeta_{1,j} = 0$, $\Psi_{i,1} = \Psi_{i,N} = \Psi_{1,j}$

9/ $W_{M,j} = 0$, $\Psi_{M,j} = 0$

Условието $\frac{\partial W}{\partial \tau} = 0$ при $\tau = 1$, записано с точност до втори порядък дава:

10/ $-3\Psi_{M,j} + 4\Psi_{M-1,j} - \Psi_{M-2,j} = 0$

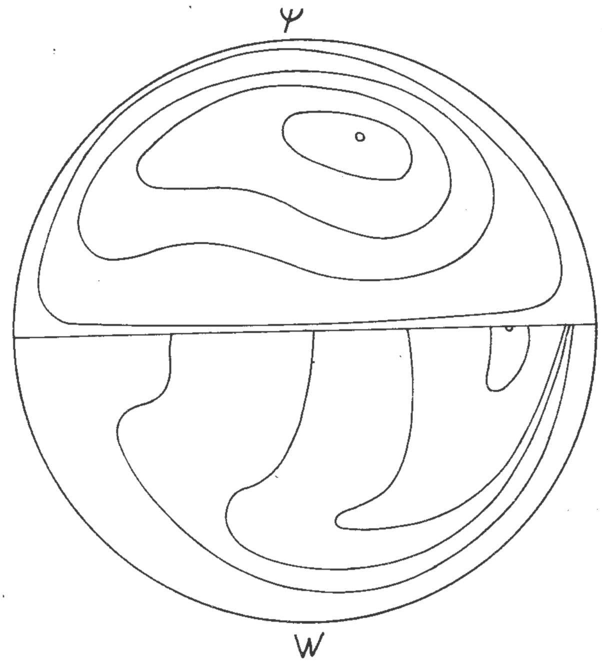
Тъй като $\Psi_{M,j} = 0$ получаваме, че:

11/ $\Psi_{M-1,j} = 1/4\, \Psi_{M-2,j}$

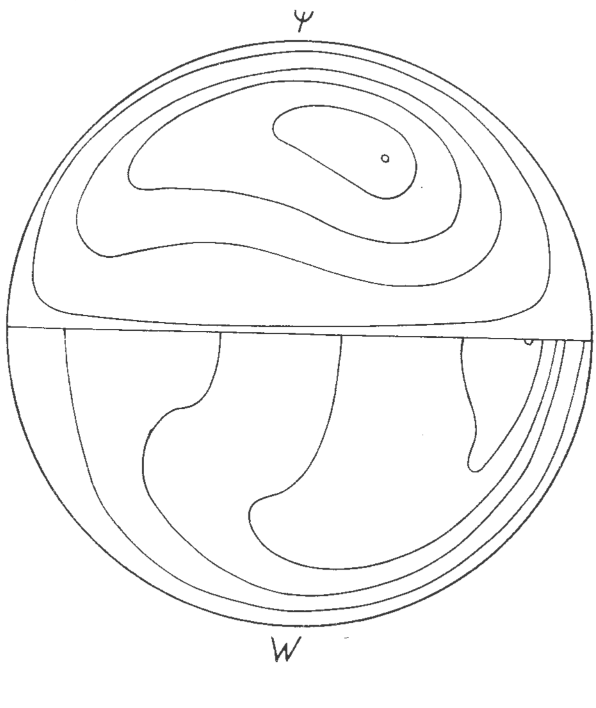
За вихъра ζ използуваме условието:

12/ $\zeta_{M,j} = -\frac{2}{h^2}\Psi_{M-1,j}$

Това гранично условие, обаче, внася неустойчивост в числения метод при големи числа на Дийн, за това то се модифицира с метода на долната релаксация:


Ψ
W
De=2000
Ψmax=14,43
Wmax=234,03

Фиг. 2


Ψ
W
De=2200
Ψmax=15,08
Wmax=252,39

Фиг.3

13/ $\zeta_{M,j}^{(k+1)} = \omega_1 \frac{2\psi_{M-1,j}}{h^2} + (1-\omega_1)\zeta_{M,j}^{(k)}$

От условието $\frac{\partial W}{\partial z}=0$ за $\varphi=\frac{\pi}{2}$ получаваме:

14/ $-3W_{1,\frac{N+1}{2}} + 4W_{2,\frac{N+1}{2}} - W_{3,\frac{N+1}{2}} = 0$

а от условието $\frac{\partial W}{\partial \varphi}=0$ при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ съответно получаваме:

15/ $-3W_{i,N} + 4W_{i,N-1} - W_{i,N-2} = 0$

$-3W_{i,1} + 4W_{i,2} - W_{i,3} = 0$

Равенството 15/ затваря системата от гранични условия. Алгебричната система от линейни уравнения се решава с метода на прогонката. Поради абсолютната устойчивост на факторизираните схеми, както показват получените резултати, така приложения метод дава много добри възможности за изследване на тези проблеми.

На фиг.2 и фиг.3 са дадени кривите на еднаквите стойности на функцията на тока и надлъжната компонента на скоростта съответно при числа на Дийн 2000 и 2200.

Накрая ще отбележим, че методът на установяването с приложената допълнителна техника може да се използува с успех както при динамични задачи в развития и началния участък на тороидални тръби с кръгово сечение, така и при топло-масообменни задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grindley J.H.& Gibson ., Proc.Roy.Soc. A80, 1908.
2. Dean W.R., Phil.Mag.Ser. 7, 4, 1927.
3. Dean W.R., Phil.Mag.Ser. 7, 5, 1928.
4. Hawthorne W.R., Proc.Roy.Soc. A 206, 374, 1951.
5. Barua S.N., Quart.J.Mech.Appl.Math., 16, 1963.
6. Olson D.E., Ph.D.thesis, Imperial College, London, 1971.
7. Singh M.P., J.Fluid Mech. 65, 3, 1974.
8. Truesdell L.C.& Adler R.J., AIChE J. 16, 1970.
9. Austin L.R., Ph.D. thesis, Univ. Utah, 1971.
10. Greenspan P., J.Fluid Mech. 57, 1973.
11. Collins W.&Dennis S., Quart.J.Mech.Appl.Math. XXVIII,2,1975.
12. Яненко Н.Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", 1967.
13. З.Запрянов, Хр.Христов, Теорет.Прилож.Мех., 1977, 2, под печат.