БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ТЕОРЕТИЧНА И ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
София, 1979, год. X, № 1

BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS
Sofia, 1979, Year X, No. 1

Об одном стационарном случайном процессе типа „белого шума" со специальными свойствами

Хр. Христов

1. Стационарный в широком смысле случайный процесс $g(t)$ называется „белым шумом", когда его корреляционная функция пропорциональна дельта-функции [1], т. е.

$$K(\tau)=M[g(t)g(t+\tau)]=2\pi c\delta(\tau), \tag{1.1}$$

где $M[\,.\,]$ — математическое ожидание, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака [3], c — интенсивность белого шума. Из (1.1) легко получается спектральная плотность

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}K(\tau)d\tau=c, \tag{1.2}$$

которая постоянна (интенсивность шума).

Физический смысл такого процесса состоит в том, что ординаты белого шума для произвольных различных моментов времени являются некоррелированными величинами. В результате дисперсия (1.1) обращается в бесконечность, а спектральная плотность (1.2) сохраняет свое значение для всех частот ω. Среди физически реализируемых процессов нет „белых шумов", поскольку все реальные процессы обладают инерцией.

Строго говоря, белый шум нельзя называть случайным процессом, поскольку его вероятностная мера неограничена. Тем не менее математическая абстракция „белый шум" широко применяется в спектральных разложениях стационарных процессов. Корреляционную функцию „белого шума" можно получать путем предельного перехода из корреляционных функций любого вида, лишь бы при этом переходе область значений τ, при которых $|K(\tau)|>0$, стремилась к нулю, а интеграл от $K(\tau)$ оставался единицей [1]. В частности, если исходный процесс нормально распределенный, то и соответствующий белый шум называется нормальным, и тогда его высшие моменты полностью определены.

Обычно белый шум принимается центрированным, т. е.

$$M[g(t)]=0. \tag{1.3}$$

Среди белых шумов, которые не являются нормально распределенными, можно выбрать разные процессы со специальными свойствами, например, с заданными высшими многоточечными моментами. В настоящей работе рассматривается особый случай дельта-коррелированного процесса $f(t)$, который является стационарным в узком смысле [2], и его трехточечный момент третьего порядка тоже дельта-функция:

$$M[f(t)f(t+\tau_1)f(t+\tau_2)]=\delta(\tau_1, \tau_2)(2\pi)^2, \tag{1.4}$$

где $\delta(\tau_1, \tau_2)$ — двухмерная дельта-функция [3]. К этому условию добавляются еще и (1.1) и (1.3). Ниже этот процесс будет называться „белый шум в узком смысле“, а все процессы, удовлетворяющие только (1.1) и (1.3) — „белый шум в широком смысле“.

Пользуясь многомерным преобразованием Фурье, нетрудно получить спектральные плотности второго и третьего моментов

$$S_1(\omega_1, \omega_2)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau_1, \tau_2)4\pi^2 e^{i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2=1 \qquad S_1(\omega)=1. \tag{1.5}$$

Обе они постоянные, что дает основания назвать процесс $f(t)$ еще „совершенный белый шум“.

2. Строгое доказательство существования рассматриваемого выше процесса не представляется возможным. Ниже приводятся некоторые общие соображения его существования. Пусть $h_a(t)$ — стационарный в узком смысле случайный процесс с одномерной плотностью распределения вероятностей для некоторой ординаты $P(u)$ $(u=h_a(t_1))$, определяемой следующей формулой:

$$P(u)=\begin{cases}(1-\alpha)\delta(u+1)+\alpha^2 e^{-\alpha u} & \text{для } u\geqq 0\\ (1-\alpha)\delta(u+1) & \text{для } u<0\end{cases}, \tag{2.1}$$

где $\delta(u)$ — дельта-функция, $\alpha>0$ — произвольное малое число. Легко показать, что $P(u)$ действительно является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(u)du=(1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u+1)du+\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha u}\,du=1-\alpha+\alpha=1\cdot$$

Имея эту плотность, можно подсчитать все моменты величины

$$\begin{aligned}&M[u]=0\\ &M[u^2]=\frac{1}{\alpha}+1-\alpha\\ &M[u^3]=\frac{1}{\alpha^2}-1+\alpha\ldots\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для строгости надо было, конечно, рассмотреть многоточечное совместное распределение вероятностей ординат $h_\alpha(t_i)$ для нескольких точек t_i. Однако это тоже не будет подлинным доказательством, поскольку надо рассматривать бесконечномерные распределения. Полагая, что в предельном переходе $\alpha\to 0$ уменьшается связь между двумя произвольными ординатами $h_\alpha(t_1)$ и $h_\alpha(t_2)$, можно обойтись без многомерных (бесконечномерных) распределений. В этом случае многоточечные моменты в предельном переходе становятся дельта-функциями, лишь бы только эти моменты были измеримыми в этом предельном переходе.

Приведенные выше рассуждения нестрогие, что характерно при рассмотрении случайных процессов. Аналогичными рассмотрениями обосновывается и „белый шум в широком смысле“ [4]. В качестве примера белого шума в узком смысле можно привести обобщенную функцию, которая в реальных точках ноль, а в рациональных точках есть случайная величина с равномерным (в смысле предельного перехода (2.1)) расспределением вероятностей на интервале $[0, \infty]$.

3. Белый шум в узком смысле обнаруживает интересные свойства. С его помощью можно построить класс стационарных в узком смысле случайных процессов по формуле

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) f(t+\tau) d\tau. \tag{3.1}$$

Здесь интеграл Лебегов, а $B(\tau)$ — неслучайная функция. Свойства этой функции определяют усредненные характеристики (моменты) из (3.1). Например, чтобы существовало математическое ожидание $M[u(t)]$, должен сходиться следующий интеграл

$$M[u(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) M[f(t+\tau)] d\tau=0. \tag{3.2}$$

Для этого достаточно, если $M[f(t+\tau)]\equiv 0$

$$B(\tau)\in L^1(-\infty,\ \infty), \text{ т. е. } \int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)|\, d\tau<+\infty.$$

Соответственно, второй момент

$$M[u(t)u(t)]=\iint_{-\infty}^{\infty} B(\tau)B(\tau_1)M[f(t+\tau)f(t+\tau_1)]d\tau d\tau_1,$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty} B(\tau)B(\tau_1)\delta(\tau-\tau_1)d\tau d\tau_1=\int_{-\infty}^{\infty} B^2(\tau)d\tau<+\infty \tag{3.3}$$

существует, если

$$B(\tau)\in L^2(-\infty,\ \infty), \text{ т. е. } \int_{-\infty}^{\infty} B^2(\tau)d\tau<+\infty,$$

а когда последнее неравенство не выполняется, $u(t)$ имеет бесконечную дисперсию. Далее аналогично получается

$$M[u(t)u(t+\xi_1)u(t+\xi_2)]=\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)B(\tau-\xi_1)B(\tau-\xi_2)d\tau. \tag{3.4}$$

Интеграл в первой части существует, если

$$B(\tau)\in L^3(-\infty,\ \infty).$$

Все это показывает, что $B(\tau)$ содержит информацию о моментах $u(t)$ вплоть до третьего порядка. Кроме этих моментов, представляется интересным и рассмотрение моментов следующего типа:

$$(3.5)\qquad M[f(t+\xi)u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) M[f(t+\xi) f(t+\tau)]d\tau = B(\xi)$$

и

$$(3.6)\qquad M[f(t+\xi)u(t)u(t+\xi_1)] = B(\xi)B(\xi-\xi_1).$$

Последнее равенство дает чрезвычайно важное свойство случайных процессов типа (3.1). Если они являются решениями нелинейной системы с квадратичной нелинейностью, то для их моментного типа (3.5) и (3.6) можно выписать замкнутую систему уравнений, несмотря на нелинейность.

Производная $u'(t)$ есть

$$(3.7)\qquad \frac{du}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dB}{d\tau} f(t+\tau)d\tau,$$

а высшие производные даются формулой:

$$u^{(m)}(t) = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} B^{(m)}(\tau) f(t+\tau)d\tau.$$

Сказанное в этом пункте легко переносится на векторные случайные процессы типа (3.1), для которых функция $f(t)$ одна и та же, а именно

$$(3.8)\qquad u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(\tau) f(t+\tau)d\tau$$

для $i=1, 2, \ldots, N$.
Взаимные корреляции и моменты будут

$$(3.9)\qquad M[u_i(t)u_j(t+\xi_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(\tau)B_j(\tau-\xi_1)d\tau,$$

где $i, j=1, \ldots, N$.
Совершенно аналогично

$$(3.10)\qquad M[f(t+\xi)u_i(t)u_j(t+\xi_1)] = B_i(\xi)B_j(\xi-\xi_1)$$

для $i, j=1, 2, \ldots, N$.

Выше получено, что каждая случайная функция, обладающая свойством (1.4), порождает класс функций, для которых (3.8) есть каноническое разложение. Сразу возникает вопрос о полноте этого класса. В [5] показано, что каждый гауссовый процесс можно представить единственным образом — равенством типа (3.8), где участвует гауссовый белый шум. Решить, однако, этот вопрос в настоящем случае не удалось. Пока можно предполагать, что в некоторых случаях процессы (3.8) являются хорошей аппроксимацией стохастических решений квадратично нелинейных систем дифференциальных уравнений. „Совершенный белый шум" будет отражать состав и стохастические свойства инфинитизимальных возмущений, а вектор $B_i(\tau)$ определяет усредненные характеристики поля. Как было сказано выше, можно получить замкнутую систему для $B_i(\tau)$. При этом полученная система совпадает с точностью до знака производных с исходной. Для новой системы, однако, ставится задача в $L^1(-\infty, \infty)$ без каких-либо начальных условий, а для исходной системы ставилась начальная задача. Если существует, и при том единственное, решение из пространства $L^1(-\infty, \infty)$, то по формуле (3.9) можно вычислить моменты случайного поля.

Литература

1. Свешников, А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Наука, М., 1968.
2. Прохоров, Ю. В., Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. Наука, М., 1973.
3. Гельфанд, И. М., Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Т. 1. Физматгиз, М., 1959.
4. Пугачев, В. С. Введение в теорию вероятностей. Наука, М., 1968.
5. Винер, Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. Иностр. лит., М., 1961.

Поступила 2. VI. 1978 г.