

Об одном каноническом разложении случайных процессов и его применение к турбулентности

Х. Христов

Нелинейные системы дифференциальных уравнений при некоторых значениях своих параметров обнаруживают неустойчивость. Очень часто неустойчивыми становятся все решения системы, и малые возмущения приводят к переходу с одного решения на другое. Обычно малые возмущения случайные, и получаемое решение, в конечном счете, тоже является случайной функцией времени и (или) пространственных координат. В гидродинамике неустойчивость системы уравнений Навье—Стокса, описывающая движение вязкой жидкости, и соответствующие ее случайные решения составляют проблему турбулентности.

Несмотря на стохастичность самих решений, которые существенным образом зависят от возмущений, усредненные их характеристики обнаруживают устойчивость и детерминированность. Потому и все усилия исследователей направлены на получение уравнений для моментов случайных полей, являющихся решениями неустойчивых систем. Нелинейность исходной системы, однако, не позволяет получить замкнутую систему для моментов. В гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости, например, для моментов разных порядков получается бесконечная система зацепляющихся уравнений — так называемая „цепочка Фридмана—Келлера“ [1]. Если в этой цепочке ограничиться только уравнениями для усредненных скоростей, а входящие в эти уравнения вторые моменты связать с усредненным тензором скоростей деформации, получается замкнутая система. Такой путь замыкания составляет суть всех полуэмпирических теорий турбулентности и восходит к Буссинеску, а потом существенно развивался Прандтлем, Карманом и др. [1]. В настоящее время широко распространены теории, использующие уравнения для кинетической энергии турбулентности, диссипации или для других характеристик типа вторых моментов, а участвующие в этих уравнениях третьи моменты замыкаются на основе эмпирических предположений [2]. Самая общая система таких уравнений предложена, по-видимому, в [3].

Другим путем замыкания является предположение о стохастических свойствах решений. Самым распространенным является предположение о квазинормальности случайных функций. Оно было применено Миллиончиковым [4], который связал четвертые моменты поля со вторыми, предполагая, что эта связь та же, как и у гауссового поля. К сожалению, в ряде важных случаях решение такого типа приводит к появлению отрицательных значений спектра энергии [5], что, конечно, не имеет физического смысла [5].

Более общий путь предлагается в [6], где случайные поля раскладываются в ряды по стохастическим полиномам Эрмита [7] — так называемый ряд Винера—Камерона—Мартина. Здесь первый член учитывает гауссовую составляющую, а остальные — негауссовыи эффекты. Получаемая система — опять незамкнутая бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений и, к тому же, с увеличивающимся числом независимых переменных. Несмотря на это, разложение Винера—Камерона—Мартина с успехом применялось в [6] к турбулентности для уравнения Бюргерса.

Все сказанное выше относится к замыканию на основе дополнительных физических предположений, которые приводят к „укорачиванию“ цепочки Фридмана—Келлера. Существует, однако, подход Хопфа [8], который состоит в прямом решении задачи Коши для характеристического функционала случайных функций, удовлетворяющих уравнениям Навье—Стокса. Такой подход можно назвать „математическим“, но пока решение уравнений Хопфа для этого функционала связано с большими трудностями.

В настоящей работе предлагается тоже „математический“ путь получения замкнутых уравнений. Строится каноническое разложение типа Винера негауссовых случайных процессов. Отличие от самого разложения Винера [6, 7, 9], в котором используется гауссовый белый шум, здесь применяется „совершенный“ белый шум из [10].

1. Разложение однородных в узком смысле негауссовых процессов по „совершенному“ белому шуму

Пусть $g(x)$ — однородный, гауссовый дельтакоррелированный случайный процесс, т. н. „белый шум“:

$$(1.1) \quad \overline{g(x+x_1)g(x)} = \delta(x_1),$$

где $(.)$ — математическое ожидание. В [6, 7, 9] показано, что каждый однородный гауссовый случайный процесс $v(x)$ имеет следующее каноническое разложение:

$$(1.2) \quad v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)g(\xi) d\xi.$$

Здесь $K(x)$ — неслучайная функция, которая ниже будет называться ядром, и для нее нужно выполняться следующее условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x) dx < +\infty,$$

т. е. $k(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Имея ядро $k(x)$, можно вычислить корреляционную функцию, а и все многоточечные моменты функции $v(x)$. Нужно отметить, что разложение типа (1.2) возможно только для центрированных случайных функций.

Представление (1.2) обладает некоторыми преимуществами перед обычными каноническими разложениями, и представляется интересным обобщить его и для некоторых негауссовых случайных функций. Это можно сделать, например, применяя вместо гауссового белого шума $g(x)$ в формуле (1.2) „совершенный“ белый шум из [10], для которого имеется, что

$$\begin{aligned}
 \overline{f(x)} &= 0, \\
 \overline{f(x+x_1)f(x)} &= \delta(x_1), \\
 \overline{f(x+x_1)f(x+x_2)f(x_2)} &= \delta(x_1, x_2).
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Пусть $u(x)$ — класс однородных в узком смысле случайных функций, порождаемый „совершенным“ белым шумом

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)f(\xi)d\xi.
 \tag{1.4}$$

Для функций этого класса нетрудно показать, что [10]

$$\begin{aligned}
 \overline{u_1(x)} &= 0, \\
 \overline{u_1(x)f(0)} &= K_1(x), \\
 \overline{u_1(x_1)u_2(x_2)f(0)} &= K_1(x_1)K_2(x_2), \\
 \overline{u_1(x_1)u_2(x_2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1-\xi)K_2(x_2-\xi)d\xi, \\
 \overline{u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)} &= \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1-\xi)K_2(x_2-\xi)K_3(x_3-\xi)d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Так как о высших моментах „совершенного“ белого шума не делались никакие предположения, то очевидно, что функции из (1.4) нельзя использовать при отыскивании решения систем, чья нелинейность не является квадратичной. Для исследования задач гидродинамики это не слишком ограничительно, ибо нелинейность уравнений Навье—Стокса квадратичная.

2. Уравнение Бюргера. Турбулентность слабых одномерных ударных волн

Бюргерсом [11] впервые предложено пользоваться модельным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
 \tag{2.1}$$

для изучения одномерной, свободнотухающей турбулентности. Нелинейные и диссипативные свойства уравнений Навье—Стокса содержатся в уравнении Бюргера, что очень важно для моделирования турбулентности. Отсутствует, однако, давление и соответственно — уравнение неразрывности. Физически (2.1) дает распространение слабых ударных волн (давлением можно пренебречь) в слабосжимаемой жидкости [12]. Полная постановка такой задачи, конечно, требует и привлечения уравнения неразрывности и уравнения состояния [13], но и само уравнение Бюргера качественно отражает турбулентность слабых ударных волн. К сожалению, очень трудно создать экспериментальную установку, где имеются только слабые ударные волны, и к тому же они одномерны. Поэтому приходится соз-

давать „математическую“ турбулентность для (2.1) или для более полной системы из [13]. Численные эксперименты по затуханию и вырождению ансамбля случайных ударных волн делались в [13, 14]. В [13] использовалась общая система одномерных движений сжимаемой жидкости, а в [14] — как раз только уравнение (2.1). Задавалось случайное начальное поле для функции $u(x, t)$ и исследовалось его развитие во времени в соответствии с (2.1). Численный метод, который использовался в [14] основан на трансформации Хопфа—Коула [15, 16], которая сводит уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности подстановкой

$$(2.2) \quad u(x, t) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(x, t).$$

В неограниченной области $x \in [-\infty, \infty]$ уравнение теплопроводности имеет для θ следующее решение:

$$(2.3) \quad \theta(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y, t_0) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu(t-t_0)}} dy,$$

где $\theta(y, t_0)$ — начальное условие. Последнее получается из начального условия для $u(x, t_0)$ при помощи (2.2)

$$(2.4) \quad \theta(y, t_0) = \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^y u(s, t_0) ds \right].$$

Подставляя (2.2) в (2.3), с учетом (2.4) нетрудно найти общее решение для $u(x, t)$. Если начальное условие для $u(x, t)$ является случайной функцией от x , то и $u(x, t)$ будет случайной функцией. Конечно, нельзя интегрировать в бесконечной области численно, поэтому в [14] начальное поле задавалось в интервале $x \in [-L, L]$ как кусочно-постоянной функцией

$$(2.5) \quad u(x_i, t_0) = \beta_i U \quad \text{для } x_i \in [d_i, d_{i+1}], |x| < L,$$

где β_i — случайная величина, принимающая значения в интервале $[-1, 1]$ и $\beta_i \beta_j = 0$ для $i \neq j$. На рис. 1 показано развитие поля $u(x, t)$ по времени с начального условия (2.5), заданного в моменте $t = -1$. Числа β_i задавались генератором случайных чисел [14].

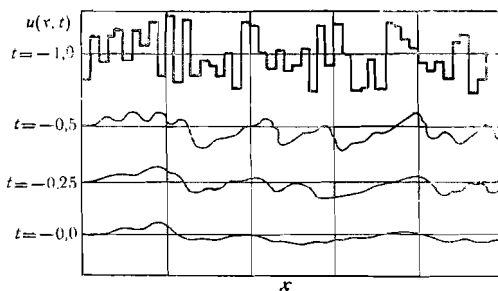


Рис. 1

Имея $u(x, 0)$, можно взять его как начальное условие и получить развитие течения дальше. Интервал времени $t \in [-1, 0]$ был необходим авторам [14] для „сглаживания“ разрывного начального условия. На основе приведенного выше алгоритма в [14] получены некоторые усредненные характеристики поля $u(x, t)$ — затухание кинетической энергии, корреляционная функция и спектр энергии.

3. Применение канонического разложения из п. 1 к стохастическим решениям уравнения Бюргерса

Выше было предложено каноническое разложение по совершенному белому шуму только для случайных функций одной независимой переменной. Хотя и $u(x, t)$ зависит от двух переменных, можно попробовать применить это разложение к случайным решениям (2.1). Для этой цели нужно ограничиться конечной стадией вырождения турбулентности и предположить, что после достаточно длинного периода времени возникает стохастическая автомодельность и решение дается формулой

$$(3.1) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-\xi}{\sqrt{\nu t}} \right) f \left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu t}} \right) d\xi.$$

Насколько оправдано предположение о автомодельности, можно судить только после нахождения решения и сравнения с экспериментом. Пока (3.1) надо понимать как попытку отыскать частное решение (2.1) определенного типа. Введем безразмерные величины

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\nu t}} \quad \eta_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\nu t}} \quad K = \frac{1}{t} B(\eta).$$

Тогда

$$(3.2) \quad u(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\eta - \eta_1) f(\eta_1) d\eta_1.$$

Для производных из u по его переменным имеем

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dB(\eta - \eta_1)}{d\eta} f(\eta_1) d\eta_1,$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{\nu t^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 B(\eta - \eta_1)}{d\eta^2} f(\eta_1) d\eta_1,$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{t^3}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\eta - \eta_1) f(\eta_1) d\eta_1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{t^3}} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dB(\eta - \eta_1)}{d\eta} f(\eta_1) d\eta_1.$$

Нетрудно показать, что

$$(3.6) \quad \overline{f(0) \frac{\partial u}{\partial t}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{t^3}} \left[B + \eta \frac{dB}{d\eta} \right],$$

$$(3.7) \quad \overline{f(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu t^3}} \frac{d^2 B}{d\eta^2},$$

$$(3.8) \quad \overline{f(0) u \frac{\partial u}{\partial x}} = \sqrt{\frac{\nu}{t^3}} B \frac{dB}{d\eta}.$$

Последним свойством обладают только однородные случайные функции класса (1.4), и именно оно позволяет замкнуть систему (в данном случае из одного уравнения) для ядра B .

Итак, умножая уравнение (2.1) на $f(0)$ и учитывая (3.6)—(3.8), получим после усреднения

$$(3.9) \quad -\frac{1}{2} \left[B + \eta \frac{dB}{d\eta} \right] + B \frac{dB}{d\eta} = \frac{d^2 B}{d\eta^2}.$$

Граничных условий для B не имеется, но нужно, чтобы

$$(3.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} B^2 d\eta < +\infty.$$

Нетрудно показать, что (3.9) удовлетворяется нечетными функциями от η , и добавим это к условиям, накладываемым на B . Простой подстановкой можно показать, что решением (3.9), удовлетворяющим (3.10) и нечетности, является

$$(3.11) \quad B = -\frac{4\eta}{2 + \eta^2}.$$

4. Усредненные характеристики. Сравнение с экспериментом

Формулы (1.5) дают, что ядро B несет всю информацию о двухточечных вторых и трехточечных третьих моментах случайного поля $u(\eta)$. Применяя (1.5), для двухточечного второго момента функций с ядром (3.11) имеем

$$(4.1) \quad Q(x_1, x_2, t) = \overline{u(x_1, t)u(x_2, t)} \\ = \frac{\nu}{t} \int_{-\infty}^{\infty} B \left(\frac{x_1}{\sqrt{\nu t}} - \eta_1 \right) B \left(\frac{x_2}{\sqrt{\nu t}} - \eta_1 \right) d\eta_1 = \frac{\nu}{t} \frac{32\sqrt{2}\pi}{8 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{\nu t}}.$$

Положим $r = x_1 - x_2$. Тогда

$$(4.2) \quad Q(r, t) = \frac{\nu}{t} \frac{32\sqrt{2}\pi}{8 + \frac{r^2}{\nu t}},$$

а нормализованная корреляционная функция (коэффициент корреляции) будет

$$(4.3) \quad Q_N(r, t) = \frac{Q(r, t)}{Q(0, t)} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{8\nu t}}.$$

Совершенно аналогично вычисляются двухточечный и трехточечный третьи моменты, но так как отсутствуют экспериментальные данные, для них здесь они не приводятся.

Применяя к (4.2) преобразования Фурье, получим спектр энергии

$$(4.4) \quad E(k, t) = \nu^2 \pi^2 \frac{32\sqrt{2}}{8\nu t} e^{-|k| \sqrt{8\nu t}}$$

и нормализованную спектральную функцию

$$(4.5) \quad E_N(k, t) = \frac{E(k, t)}{E(0, t)} = e^{-\sqrt{8\nu t} |k|},$$

где k — волновое число.

Уже можно сделать качественное сравнение с результатами работы [13]. Там получено, что энергия турбулентности затухает как $t^{-0.9}$, а (4.2) дает вырождение t^{-1} . Отличие небольшое и может быть оно связано с тем, что в [13] решалась система из двух уравнений и что вряд ли время было достаточно велико, чтобы установился автомодельный режим. Спектр энергии там же был получен для достаточно больших k порядка e^{-ak} , что согласуется с (4.5). Очень интересной отличительной чертой Бюргерсовой турбулентности является ненулевая плотность спектра энергии при $k=0$. В настоящей работе это следует из (4.5) и получалось в обоих численных экспериментах [13,14].

Гораздо интереснее сравнить полученные здесь результаты с численным экспериментом [14], ибо там решалось именно уравнение Бюргерса. К сожалению, в этой работе не указана величина вязкости, а только число Рейнольдса по начальным данным. Последнее нельзя применить здесь, так как рассматривается автомодельный участок вырождения, где уже „забыто“ начальное условие и связанное с ним число Рейнольдса. Поэтому можно принять, что для $r=1$ корреляционная функция $Q_N(r, t)$

из (4.3) совпадает с корреляционной функцией $R(r, t)$ из [14] в моменте $t=1$. Тогда можно найти, что это случится (т. е. обе функции совпадут при $r=1$), если $\sqrt{8\nu t}=1.2$. Подставляя в (4.3), получим всю корреляцию. На рис. 2 она представлена кривой № 2. Корреляция $R(r, t)$ работой [14] дается кривой № 1.

Соответствие между теоретическими результатами и численным экспериментом удовлетворительно. Остается сравнить результаты для энергии. Это надо сделать при $\sqrt{8\nu t}=1.2$. Результат показан на рис. 3. Совпадение, в общем, неплохое за исключением очень больших волновых чисел. Полученный здесь спектр энергии затухает быстрее. Это отличие тоже объясняется тем, что в эксперименте счет велся для не очень больших времен.

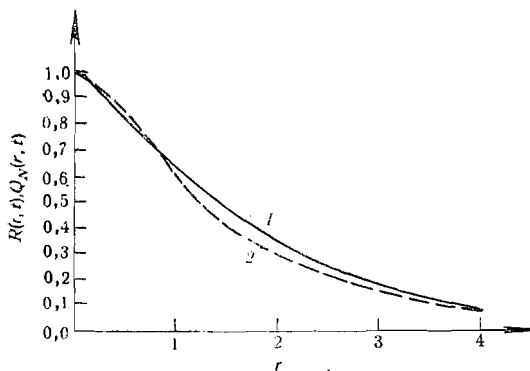


Рис. 2

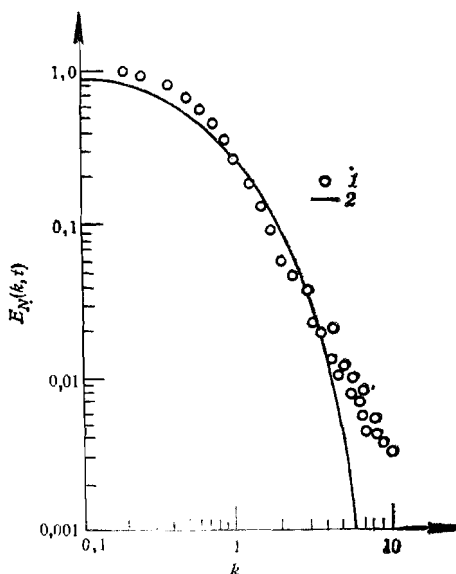


Рис. 3

5. Выводы

Развитый в настоящей работе метод применительно к уравнению Бюргера дал возможность получить замкнутое уравнение, описывающее стохастические свойства свободно затухающей турбулентности. Решение получено в аналитическом виде и удовлетворительно согласуется с имеющимися экспериментальными данными. Для дальнейшей проверки метода представляется необходимым проделать численные эксперименты с затуханием стохастических решений уравнения Бюргера для очень больших времен, где можно ожидать стохастическую автомодельность. Нужно решить, конечно, и другую задачу: применить развитый выше метод к неавтомодельной области изменения времени.

Результаты настоящей работы дают основание заключить, что случайные функции, имеющие каноническое разложение (1.4), иногда могут служить как хорошая аппроксимация для решений квадратично нелинейных систем дифференциальных уравнений. Для ядер получается замкнутая система вместо бесконечной цепочки типа Фридмана—Келлера, но граничная задача для этих ядер более сложная—суммируемость квадрата функций на интервале $[-\infty, \infty]$, и пока очень слабо изучена. Остается открытым вопрос о существовании и единственности таких решений для более общих систем, нежели уравнения Бюргера.

Литература

1. Хинце, И. О. „Турбулентность“. — Физ.-мат. лит., М., 1963.
2. Harlow, F. N., P. I. Nakayama. Phys. of fluids, v. 10, p. 2323, 1967.
3. Lounder, B. E., G. J. Reese, W. Rodi. — J. fluid mech., v. 68, part 3, p. 537.
4. Миллионщиков, М. Д. — Докл. АН СССР, т. 32, с. 611, 615, 1941.
5. Ogura, Y. — J. of fluid mech., vol. 16, p. 33, 1963.
6. Meecham, W. C., A. Siegel. — Phys. of fluids, vol. 7, No. 8, p. 1178, 1964.
7. Cameron, R. H., W. T. Martin. Annals of mathematics, vol. 48, No. 2, p. 385, 1947.
8. Холф, Э. — В: Гидродинамическая неустойчивость. Мир, М., 1964.
9. Saffman, P. G. — In: Topics in Nonlinear Physics, ed. N. J. Zabusky, Springer—Verlag, Berlin, 1968.
10. Христов, Х. И. — Изв. Болг. акад. наук, Теор. и прикл. мех., год. 10, кн. 1, с. 53, 1979.
11. Бюргерс, Н. И. — В: Проблемы механики. Т. 1, М., ИЛ, 1955.
12. Tatsumi, T., H. Tokunaga. — J. of fluid mech., vol. 65, part 3, p. 581, 1974.
13. Tokunaga, H. — Journ. of Phys. Soc. of Japan, vol. 41, No 1, p. 328, 1976.
14. Jeng, D. T., R. Forester, S. Haaland, W. C. Meecham. — Phys. of fluids, vol. 9 No. 11, p. 2114, 1966.
15. Hopf, E. Commun. Pure and Appl. Math., vol. 3, p. 201, 1950.
16. Cole, J. D. Quart. Appl. Math., vol. 9, p. 225, 1951.

Поступила 10. VII. 1978 г.