ЭФФЕКТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ИХ СОВМЕСТНОМ ОБТЕКАНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

М.К.Орунханов, Х.И.Христов

В последние годы отмечается повышенный интерес к теоретическому исследованию течения многофазных жидкостей. Это связано с их большим практическим применением, которое и обусловливает необходимость теоретических расчетов.

Основным подходом, по-видимому, является введение понятия "континуума частиц" с последующей записью уравнения движения этого континуума [I]. При этом возникает проблема учета взаимодействия частиц с жидкостью и частиц с частицами. Последнее взаимодействие должно определять внутренние поверхностные силы для континуума частиц. В большинстве работ, появившихся в последнее время, учитывают только силы первого типа (объемные силы взаимодействия частиц с жидкостью) и это обычно силы сопротивления, так называемые силы Стокса [2]. Кроме сил Стокса можно учитывать силы, связанные с неоднородностью потока, например, силы Магнуса.

Гораздо меньше внимания уделялось учету сил взаимодействия частиц при их стесненном обтекании жидкостью во время их движения в суспензии. Это связано с трудностями расчета обтекания в многосвязных областях. Пренебрежение этими силами, однако, приводит к вырождению модели даже в одномерном случае течения суспензии в трубе и выражается отсутствием уравнения для концентрации, т.к. уравнения неразрывности выполняются в этом случае тривиально. По-видимому, учет взаимодействия между частицами может дать недостающую информацию, которая должна определять концентрацию. Поэтому целью настоящей работы является выяснение некоторых

аспектов этого взаимодействия при помощи модельной задачи.

Рассмотрим обтекание двух параллельных круговых цилиндров одинакового радиуса потоком идеальной жидкости, направление скорости которой перпендикулярно линии, связующей центры цилиндров (рис. I). Движение жидкости предполагается потенциальным и описывается следующей краевой задачей

$$\Delta\varphi(x,y)=0\,,\quad (x,y)\in\Omega\,, \tag{I}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0\,, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x^2+y^2\to\infty}=0\,,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{x^2+y^2=U=const}\,; \tag{3}$$

здесь Γ_1, Γ_2 – границы обтекаемых профилей, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Γ_i.

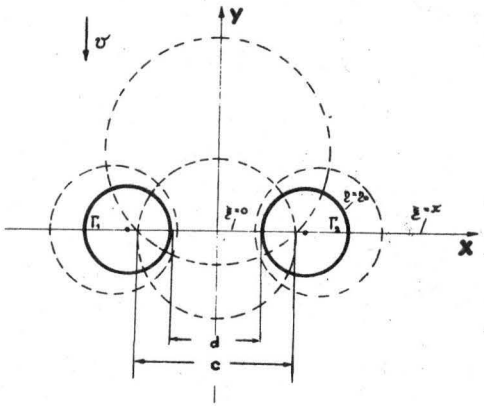

Рис. I

Такая задача решалась неоднократно разными авторами. Обзор работ в этом направлении можно найти в монографиях [3], [4]. Эти работы можно разделить на две группы: в первых авторы решают поставленную задачу методом отражений (метод, который с успехом применялся и для вязкой задачи в постановке Стокса [5]), в других работах решение получено методом разделения переменных в

бицилиндрических координатах. Но для успешного применения этих методов требуется, чтобы радиус цилиндров был намного меньше, чем расстояние между ними. В то же время представляется интересным выявить силу взаимодействия цилиндров и для относительно близко расположенных цилиндров. В настоящей работе это сделано при помощи численного решения задачи (I)-(3).

Симметричное расположение цилиндров позволяет рассматривать лишь одну половину области течения. Для функции φ_0, связь которой с потенциалом φ выражается в виде

$$\varphi = \varphi_0 + U y \tag{4}$$

криволинейные бицилиндрические координаты позволяют интерпретировать задачу (I)-(3) следующим образом:

$$\Delta\varphi_0(\eta,\xi) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = U \cdot \frac{c \cdot \operatorname{sh}\eta_0 \cdot \sin\xi}{(\operatorname{ch}\eta_0 - \cos\xi)^2}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0, \tag{7}$$

$$\varphi_0(\eta,-\pi) = \varphi_0(\eta,\pi). \tag{8}$$

Здесь $\pm\eta_0 = const$ – координатные линии, соответствующие границам обтекаемых тел, $2c$ – расстояние между полюсами бицилиндрической системы координат. Условие для φ на оси симметрии в области Ω при переходе к криволинейным переменным имеет вид

$$\frac{\operatorname{ch}\eta\cos\xi - 1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \frac{\operatorname{sh}\eta\sin\xi}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0 \quad \text{на оси} \quad \eta = 0$$

Вместе с условием на бесконечности для функции φ_0, которое трансформируется в начало криволинейной системы (η,ξ) это выражение дает (7).

Координатные линии используемой бицилиндрической системы координат показаны на рис. I пунктирными линиями. Прямоугольник

$$0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi$$

в плоскости (η,ξ) покрывается равномерной сеткой с шагами h

по η и ℓ по ξ так, чтобы боковые стороны прямоугольника не совпадали с узлами сетки.

$$\eta_i = (i - 1/2)h, \quad i = 0 \div N+1,$$

$$\xi_j = (j - M/2)\ell, \quad j = 0 \div M,$$

$$h = \eta_0/N, \quad \ell = 2\pi/M.$$

На такой сетке производные, заданные на границе области, аппроксимируются со 2-м порядком точности. Задача (5)-(8) решалась методом установления по схеме стабилизирующей поправки. Схема абсолютно устойчива, имеет второй порядок аппроксимации по всем переменным. Критерием установления было условие

$$\max_{D^h} \left|\varphi^{n+1} - \varphi^n\right| \leq 0.0001.$$

Число итераций необходимых для выполнения этого условия на сетке 4I x 2I в зависимости от расстояния между цилиндрами колеблется от 20 до 60 итераций. Линии тока полученного таким образом решения дает удовлетворительное качественное совпадение с известными результатами других авторов [6].

Сила, действующая на единицу длины цилиндра, определяется по формуле

$$F = -\int_{\Sigma} p_c \vec{n}\, d\sigma, \tag{9}$$

где Σ – поверхность цилиндра, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к этой поверхности, p_c – гидродинамическое давление, которое в точках поверхности Σ находится из интеграла Бернулли:

$$\frac{p_c}{\rho} = \frac{1}{2}\vec{V}^2 = 0.$$

Формула (9) аппроксимируется методом прямоугольников, который имеет второй порядок точности. Для горизонтальной составляющей силы получаем формулу

$$F_x = -\int_{-\pi}^{\pi} p_c \cdot c\,\frac{1 - \operatorname{ch}\eta_0\cos\xi}{(\operatorname{ch}\eta_0 - \cos\xi)^2}\, d\xi \simeq$$

$$\simeq 2\pi c\ell \sum_{i=1}^{M} p_c\,\frac{1 - \operatorname{ch}\eta_0\cos\xi_i}{(\operatorname{ch}\eta_0 - \cos\xi_i)^2}, \tag{10}$$

где

$$P_c = \frac{(\operatorname{ch}\eta_0 - \cos\xi_i)^2}{2c^2}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} + U\,\frac{\operatorname{ch}\eta_0\cos\xi_i - 1}{2c}.$$

На рис. 2 показана зависимость безразмерной силы от расстояния d между цилиндрами.(кривая I). Кривая 2 показывает эту же зависимость, если вычислять силу по формуле, полученной в [4]. Видно хорошее совпадение в области умеренных расстояний между цилиндрами, что дает основание считать настоящие результаты достоверными. Для очень далеко расположенных цилиндров наблюдается небольшое расхождение, которое связано с чрезмерным увеличением области и, как следствие, огрублению шага сетки. Для очень малых d наблюдается сильное отличие, которое состоит в том, что подсчитанная в настоящей работе сила заметно превышает силу из [4]. Это связано с тем, что аналитические выражения теряют пригодность для малых d [3], [4]. Нетрудно показать, что даже для умеренных объемных концентраций суспензии порядка 0.I расстояние между частицами не превышает I.5-2 радиуса и силу взаимодействия уже нельзя подсчитывать по имеющимся аналитическим формулам, а надо брать из рис. 2.

Взаимное притяжение цилиндров при таком обтекании потоком, имеющим на бесконечности постоянную скорость, нарушится, если внести в поток неоднородность.

Используя вычислительный алгоритм предыдущей задачи нетрудно сконструировать поле течения идеальной жидкости с постоянной завихренностью. Поле

$$\vec{u} = \vec{v} + \nabla\tilde{\varphi} \qquad \text{(II)}$$

описывает параллельный скошенный поток, если взять

$$v_1 = 0,\ v_2 = \varepsilon\cdot x + U,\ \vec{v} = (v_1, v_2),$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_{\Gamma_1,\Gamma_2} = -(\vec{v}\cdot\vec{n}),$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right|_{x^2+y^2\to\infty} = 0,\quad \left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\right|_{x^2+y^2\to\infty} = 0,$$

и кроме того $\Delta\tilde{\varphi} = 0$ в Ω.

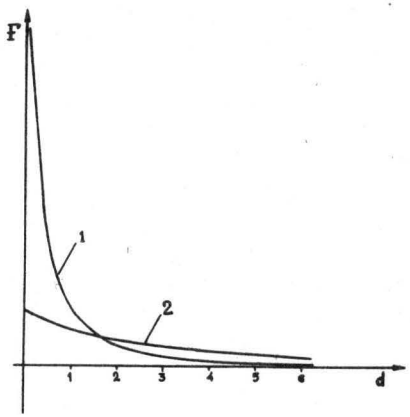

Рис.2

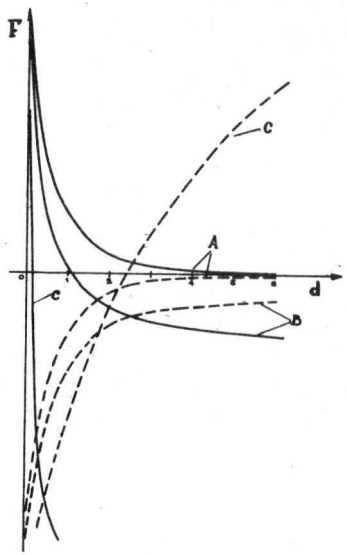

Рис.3

Силы взаимодействия цилиндров подсчитываются по формуле немногим отличающейся от формулы (I0). При достаточно малом ε скошенность потока практически не влияет на взаимодействие цилиндров. Кривые A на рис.3 (пунктирная и сплошная) изображают зависимость безразмерной силы взаимодействия от расстояния d между цилиндрами при $\varepsilon = -10^{-5}$. На рис.3 пунктирные линии показывают зависимость силы, действующей на левый цилиндр, сплошные линии соответствуют правому цилиндру. Здесь, так же как на рис.2, положительной считается сила направленная влево. Кривые A, таким образом, качественно совпадают с кривой 1 из рис.2. При увеличении $|\varepsilon|$, в зависимости от расстояния между цилиндрами, силы взаимодействия оказываются одинакового направления. Кривые B и C на рис.3 характеризуют взаимодействие цилиндров при обтекании их параллельным скошенным потоком с $\varepsilon = -0.1$ и $\varepsilon = -0.5$.

Благодарим Б.Г.Кузнецова за постоянное внимание и полезные беседы.

I. Кузнецов Б.Г. Об уравнениях гидродинамики многофазных систем. ЧММСС, т. 4, № I, I973, 56-70.
2. Стулов В.П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, № I, I979, 5I-60.
3. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидромеханика. "Мир", М., I964.
4. Морс Ф.М., Фешбах. Методы теоретической физики. ИЛ, М., I960.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. "Мир", М., I976.
6. Carpenter L.H. On the motion of two culinders in an ideal Fluid. J. Res. Bur. Standarts, Vol.60, No.2, 1958, p.p.83--87.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТУРА ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО СОПЛА ЛАВАЛЯ С ПОМОЩЬЮ ПРЯМЫХ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В СЛУЧАЕ РАВНОВЕСНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.Д.Рычков

Задача оптимизации сопла Лаваля, т.е. построения контура сопла, обеспечивающего максимальную величину его тяги или единичного импульса является вариационной задачей газовой динамики. Решению этой задачи посвящено достаточно большое число работ, среди которых наиболее полное, на наш взгляд, представление о сути проблемы, методах решения и полученных результатах дает монография А.Н.Крайко [I]. К сожалению, все разработанные и весьма эффективные методы решения такой вариационной задачи применимы лишь для оптимизации сверхзвуковых частей сопл. Поэтому в данной работе для оптимизации всего сопла в целом, включая и до-трансзвуковую его часть, используются прямые вариационные методы.

Суть этих методов заключается в следующем [I]. По ряду соображений, которые будут рассмотрены ниже, выбирается некоторый класс функций, в котором искомый контур может быть представлен через конечный набор свободных параметров. Изопериметрические условия задачи и некоторые дополнительные соображения (гладкость стыковки отдельных кривых, введение углов изломов и т.д.) накладывают на эти параметры определенные связи. Тогда оставшиеся n независимых параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют n-мерное пространство, в котором с помощью каких-либо численных методов оптимизации отыскивается максимум искомого функционала (тяга или единичный импульс сопла), являющегося теперь уже функцией