

Х.И. ХРИСТОВ (Болгария), В.П. НАРТОВ

**БИФУРКАЦИЯ И ПОЯВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ  
В ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ,  
СВЯЗАННОЙ С ПЛОСКИМ ТЕЧЕНИЕМ ПУАЗЕЙЛЯ**

(Представлено академиком Н.Н. Яненко 9 IX 1983)

Для течения вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами (плоское течение Пуазейля) применяется принцип наименьшей диссипации. Минимум находится в классе точечных случайных функций. Поставлена краевая задача для ядер стохастических интегралов, которая решена численно. Ядра интерпретируются как поле скоростей, создаваемое одиночной структурой. Проведены расчеты для нескольких значений числа Рейнольдса, построенного по динамической скорости. Рассчитанные характеристики течения сравниваются с экспериментальными данными.

1. Неустойчивость и переход к турбулентности в плоском течении Пуазейля является важным вопросом теории гидродинамической устойчивости. Первый подход к исследованию неустойчивости был энергетическим [1, 2], а потом уже эволюцию возмущений начали исследовать на основе уравнений Навье–Стокса [3]. Такой подход получил широкое развитие (см. обзор [4]) и привел к большому числу результатов в области линейной и нелинейной неустойчивости разных видов течений.

Интерес к вариационному подходу в устойчивости в последнее время снова возрос. Малкус [5] предложил принцип максимальной диссипации энергии возмущенного течения и на его основе рассчитал константу Кармана для плоского течения Пуазейля. Христов [7] обосновал в полуэмпирическом ключе возможность существования принципа минимальной диссипации для плоского течения Пуазейля, а в работе [4] показано, что на основе этого принципа хорошо предсказывается ниже критическое число Рейнольдса перехода к турбулентности в этом течении.

В настоящей работе в качестве вариационного принципа принимается принцип наименьшей диссипации, а классом функций для возмущений является множество случайных потоков.

Предполагается, что в плоском течении Пуазейля осуществляется только тот режим (ламинарный или турбулентный), который доставляет минимум функционалу диссипации

$$(1) \int_0^H \left[ \nu \left( \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 + \epsilon \right] dy = \min,$$

где  $\bar{u}_x$  — осредненная скорость в направлении оси канала,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $H$  — полуширина канала,  $\epsilon$  — плотность скорости диссипации турбулентных пульсаций. Функционал (1) должен минимизироваться при ограничении

$$(2) \nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} = -Ay + \overline{u'_x u'_y},$$

которое является уравнением Рейнольдса для соответствующей компоненты скорости. Здесь  $A$  — модуль градиента давления, который порождает течение,  $-u'_x u'_y$  — рейнольдсово напряжение.

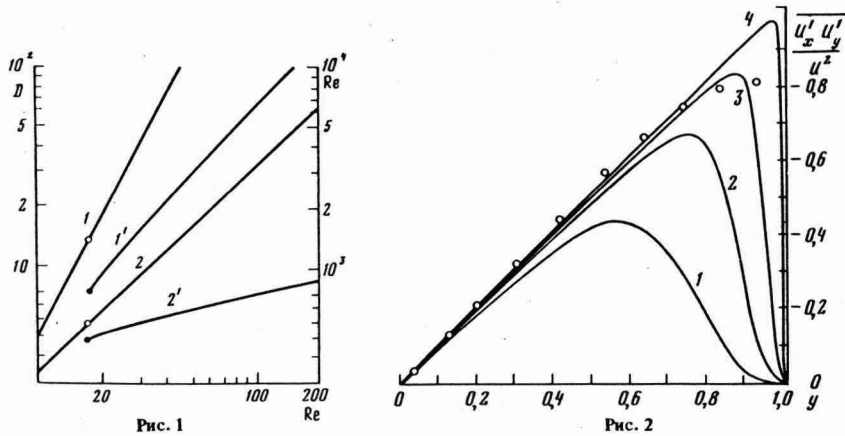


Рис. 1

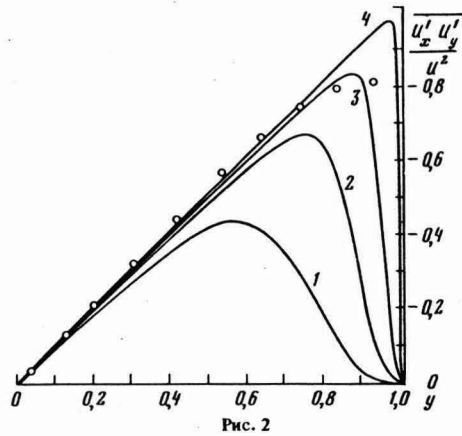


Рис. 2

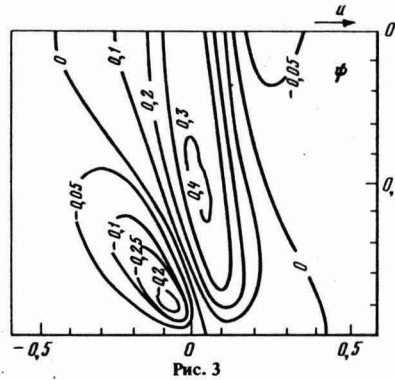


Рис. 3

Рис. 1. Число Рейнольдса  $\overline{Re}$  ( $1, 1'$ ) по средней скорости и полная диссипация  $D$  ( $2, 2'$ ) в полуканале как функции  $Re$ .  $1, 2$  — ламинарный режим;  $1', 2'$  — турбулентный

Рис. 2. Рейнольдсово напряжение:  $Re = 20$  ( $1$ ),  $40$  ( $2$ ),  $100$  ( $3$ ),  $2340$  ( $4$ ); точки — эксперимент Конт-Белло при  $Re = 2340$

Рис. 3. Изолинии функции  $\psi$  (когерентные структуры) при  $Re = 2340$

2. Чтобы воспользоваться принципом минимальной диссипации, надо иметь связь между диссипацией пульсаций и реинольдсовым напряжением. В [7] задача замыкалась полуэмпирическим путем. Сейчас минимум отыскивается в классе случайных потоков. Последний характеризуется тем, что состоит из одинаковых по форме, но случайно разбросанных по длине канала импульсов. Пусть еще осредненные величины зависят только от поперечной переменной  $y$ . Тогда, следуя Винеру [8], имеем

$$(3) \quad u'_x = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(y, x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad u'_y = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(y, x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $K_x, K_y \in L^2(-\infty, \infty)$ , а  $f$  — белый шум, т.е.

$$(4) \quad \langle f(x) \rangle = 0, \quad \langle f(\xi) f(x + \xi) \rangle = L^2 \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\langle \cdot \rangle$  означает осреднение по ансамблю,  $L^2$  имеет размерность длины. Подставляя (3) в формулы для диссипации и для турбулентно-

го напряжения, а также учитывая (4), имеем

$$(5) \quad \epsilon = 2\nu L^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial K_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial K_x}{\partial y} + \frac{\partial K_y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi,$$

и

$$(6) \quad \overline{u'_x u'_y} = L^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(y, \xi) K_y(y, \xi) d\xi.$$

Соответственно из уравнения неразрывности легко получается

$$(7) \quad \frac{\partial K_x}{\partial \xi} + \frac{\partial K_y}{\partial y} = 0.$$

Вариационная задача (1), (2), (5), (6), (7) и есть стохастическая реализация принципа наименьшей диссипации.

3. Уравнения Эйлера—Лагранжа для минимизации функционала (1) при ограничениях (2) и (7) с учетом (5) и (6) выглядят так:

$$2\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K_x + \frac{1}{L^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi} + \lambda_1 K_y = 0,$$

$$2\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K_y + \frac{1}{L^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_1 K_x = 0,$$

$$\lambda_1 = -2 \frac{d\bar{u}_x}{dy}.$$

К этим уравнениям добавляются (2) и (7) и получается замкнутая система. Введем функции тока

$$(8) \quad K_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_y = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

и безразмерных величин

$$\psi = \nu \sqrt{\frac{\nu}{L^2 u^*}} \psi', \quad y = Hy', \quad \xi = H\xi', \quad Re = \frac{Hu^*}{\nu},$$

$$\bar{u}_x = u^* u' \quad (u^* = \sqrt{|A|H}),$$

получается система

$$(9) \quad - \left( 2 \frac{du}{dy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial y} + \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{Re} \nabla \nabla \psi,$$

$$(10) \quad -y - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{Re} \frac{du}{dy}$$

с граничными условиями

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = \pm 1,$$

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\xi < +\infty,$$

которые означают, что пульсации затухают на стенках канала и что энергия возмущений конечна.

4. Граничная задача (9–(12) решалась численно путем введения преобразования для координаты  $\xi$ , которое, "сжимает" бесконечный интервал  $(-\infty, \infty)$  в интервале  $[-1, 1]$ . По оси  $y$  сетка строилась неравномерной, сгущающейся вблизи твердых стенок. После того как отыскана функция  $\psi$ , на основе свойств разложения (3), (4) можно вычислить все стохастические характеристики течения. Расчеты позволили получить нижнее и верхнее критические числа Рейнольдса, которые оказались равны соответственно 10 и 17, причем нижнее критическое число в пересчете на число Рейнольдса по максимальной скорости хорошо согласуется с результатом Орра [2]. Между верхним и нижним числами лежит область, в которой нетривиальное решение развивается только для достаточно большой амплитуды начального возмущения. На рис. 1 приведены диссипация  $D$  и число Рейнольдса средней скорости  $Re$  как функции  $Re$ . Видно, что диссипация стохастического течения становится меньше ламинарной при числе Рейнольдса  $Re = 10$ , которое совпадает с нижним критическим числом  $Re$ , т.е. появление стохастического решения согласуется с принципом наименьшей диссипации. Представление (3) ограничивает применение принципа для описания турбулентности областью умеренно закритических чисел  $Re$ , тем не менее была рассчитана эволюция стохастических характеристик течения для  $Re = 20, 40, 100, 2340$ , причем последнему значению соответствует  $Re = 57000$ , что позволяет провести сравнение с экспериментальными данными Конт-Белло [9].

Оказалось, что рассчитанные и экспериментальные характеристики турбулентности находятся в качественном либо в количественном согласии. На рис. 2 видно, что для турбулентных напряжений, в частности, даже количественное совпадение с экспериментом является очень хорошим.

Отметим, что функции  $K_x$  и  $K_y$  интерпретируются как компоненты скорости одиночного выброса (когерентной структуры), т.е.  $\psi$  есть функция тока одиночного вихря. Форма выброса приведена на рис. 3 для числа Рейнольдса  $Re = 2340$ . Она похожа на форму структур из работы [10] для пограничного слоя на плоской пластине.

Институт теоретической и прикладной механики  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

Поступило  
25 X 1983

Институт механики и биомеханики  
Болгарской Академии наук, София

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. — Trans. Roy. Soc. London, 1866, vol. 186A, p. 123–164.
2. Orr W.McF. — Proc. Roy. Irish Acad., 1907, vol. 27, p. 69–132.
3. Sommerfeld A. — Atti del IV Congr. Intern. dei Matem. Rome 6–11, IV, 1908, vol. III, p. 116–124.
4. Christov C. — Bulg. Acad. Sci. Theor. Appl. Mech., 1982, vol. 13, № 1, p. 59–64.
5. Malkus W.V.R. — J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, № 3, p. 521–539.
6. Гольдштик М.А. — ДАН, 1968, т. 182, № 5, с. 1026–1028.
7. Христов Х.И. — ДАН, 1979, т. 245, № 5, с. 1071–1075.
8. Вилер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: ИЛ, 1961, с. 158.
9. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968, с. 176.
10. Zilberman M., Wygnanski I., Kaplan R.E. — Phys. Fluids, 1977, vol. 20, № 10, part II, S258–S271.