АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ И ЭНЕРГЕТИКИ

(Труды Всесоюзной конференции молодых ученых и специалистов)

Сборник статей под редакцией
д.ф.-м.н. Фомина В.М.

НОВОСИБИРСК - 1985

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ В ТЕЧЕНИЯХ С МЕДЛЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ СТРУКТУРЫ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

В.П. Нартов, Х.И. Христов

В двумерных уравнениях Навье-Стокса разобьем функцию тока на осредненную и пульсационную составляющие

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=\nu\Delta\Delta\psi-\left\langle\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y}\right\rangle. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y}-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}-$$
$$-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y}=\nu\Delta\Delta\psi'. \qquad (2)$$

Пульсационная составляющая ψ' зависит от продольной координаты x двояким образом: локально и глобально. Причем, зависимость от локальной координаты намного сильнее, чем от глобальной. Поэтому в уравнении (2) x будем понимать как локальную координату. Из аналогичных соображений в уравнении (I) производными по x можно пренебречь по сравнению с производными по y. Будем искать автомодельное решение уравнения (I) (производную по времени опустим)

$$\psi=U_\infty f(x)F(\eta),\ \eta=y/f(x),\ \left\langle\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y}\right\rangle=\frac{U_\infty^2 h^2}{f(x)^4}S'(\eta).$$

Можно показать, что при этом

$$f(x)=\sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}},\ h=\left(\frac{2\nu^3}{U_\infty^3}x\right)^{1/4}. \qquad (3)$$

И для F получаем "турбулентное" уравнение Блазиуса

$$-FF''+S=F''' \qquad (4)$$

Подобным образом будем масштабировать ψ'

$$\psi'=U_\infty h(x)Q(\xi,\eta),\ \xi=x/f(x),\ \eta=y/f(x),\ \tau=tU_\infty h/f(x)^2.$$

Подставляя эти выражения в (2) и учитывая (3), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\Delta Q}{\partial\xi}-\frac{\partial Q}{\partial\xi}\frac{\partial\Delta Q}{\partial\eta}+Re_x\left[F'\frac{\partial\Delta Q}{\partial\xi}-F'''\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right]=\frac{1}{Re_x}\Delta\Delta Q. \qquad (5)$$

В уравнении (5) "медленная" зависимость от x входит через $Re_x=(2U_\infty x/\nu)^{1/4}$. Итак, (4) и (5) формируют систему уравнений, которая описывает стохастический режим течений с медленным изменением в продольном направлении. Будем искать стохастическое решение так же, как в [I]

$$Q(\xi,\eta,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi-c\tau-z,\eta)[f(z)-\gamma]dz \quad ,$$

где $f(z)$ - совершенный белый шум (терминология [I]), а $\gamma\equiv\langle f(z)\rangle$ - число структур на единице длины по переменной ξ. Тогда (4) и (5) принимают вид

$$-(F'F''+FF''')-\gamma\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial H}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\eta}d\xi=F^{IV} \quad ,$$

$$\left(Re_x F'-c+\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\Delta H}{\partial z}-\left(Re_x F'''+\frac{\partial\Delta H}{\partial\eta}\right)\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{1}{Re_x}\Delta\Delta H \quad .$$

Мы получили замкнутую систему. Граничными условиями для H будут

$$H', H\to 0 \quad , \quad \xi,\eta\to\infty$$

Граничные условия для F выбираются из физических соображений. Методика решения может быть заимствована из [2].

I. Христов Х.И. Каноническое представление случайных процессов и его применение к турбулентности. - Теор. и прил.мех., I980, т.I0, № I, с.59-66.

2. Христов Х.И., Нартов В.П. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля. - В кн.: Численное моделирование в динамике жидкости. - Новосибирск: Изд.ИТПМ СО АН СССР, I983, с.I24-I44.