АКАДЕМИЯ
НАУК
СССР

СИБИРСКОЕ
ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ
ТЕПЛО-
ФИЗИКИ

Новосибирск

В.П. Нартов
Х.И. Христов

СТРУКТУРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕЙ ДИССИПАЦИИ В ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

ПРЕПРИНТ 199 89

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ

В. П. Нартов, Х. И. Христов

СТРУКТУРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕЙ ДИССИПАЦИИ В ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Препринт № 199-89

Новосибирск, 1989

УДК 532.517.45

Для течения вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами (плоское течение Пуазейля) с заданным перепадом давления применяется принцип наименьшей диссипации. Ограничениями являются уравнения Рейнольдса и интегральный закон равенства порождения и диссипации энергии пульсаций. Минимум находится в классе точечных случайных функций. Предполагается эффективная двумерность пульсационных характеристик, в связи с чем вводится свободный параметр. Поставлена краевая задача для ядер стохастических интегралов и предложен численный метод ее решения. Рассчитанные характеристики стохастического режима течения сравниваются с экспериментальными данными.

STRUCTURAL TURBULENCE AND PRINCIPLE
OF LEAST DISSIPATION IN POISEULLE FLOW

V. P. Nartov and Ch. I. Christov

For the pressure-driven flows between two flat plates (Poiseulle flows) the principle of least dissipation is applied. Minimum is sought in the class of random functions which can be represented by the truncated after the first-order term Poisson-Wiener functional expansion of stochastic function. Calculations show that for certain value of Reynolds number a bifurcation takes place and a nontrivial solution for the first Poisson-Wiener kernel occurs. It turns out that the total rate of dissipation for the stochastic solution is smaller than that of laminar one. Various characteristics of the stochastic solution such as mean velocity profile, energy of pulsations, correlations, spectra, etc. are calculated and most of them are in good quantitative or qualitative agreement with the experimental data concerning turbulent Poiseulle flows.

© Институт теплофизики СО АН СССР, 1989 г.

I. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ТОЧЕЧНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СТОХАСТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕУСТОЙЧИВЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Известно, что большинство физических систем обладает стохастическими свойствами при некоторых значениях определяющих параметров. Такие системы можно разделить на два основных класса. К первому классу принадлежат системы с внесенной стохастичностью, т.е. со случайными коэффициентами или со случайными начальными данными. Это композитные материалы, суспензии, так называемая вырождающаяся турбулентность и т.д. Второй класс состоит из детерминированных систем, решение которых эволюционирует из детерминированных начальных данных, но становится случайным из-за неустойчивости.

Системы первого класса часто являются линейными, в то время как второй класс представлен исключительно нелинейными системами. В статистическом смысле, однако, оба класса являются нелинейными, поскольку случайными являются как коэффициенты, так и решение.

Относительно строгой техникой исследования таких систем можно считать вариационные принципы и метод возмущений. В статистической теории турбулентности их применение ограничено следующими обстоятельствами. Не существует вариационного принципа (голономного вариационного уравнения), адекватного системе Навье-Стокса [I]. В последнее время было предложено несколько гипотез (см. [2I] и цитируемую там литературу), но они фактически являются полуэмпирическими моделями. Техника возмущений дает результаты только для случая вырождающейся изотропной однородной турбулентности [2, 35].

После Келлера и Фридмана [37], получивших бесконечную цепочку уравнений для моментов из системы Навье-Стокса, основным направлением большого числа работ было исследование возможностей замыкания различных усеченных версий системы Фридмана - Келлера. Обычно это делалось через связь моментов высшего и низшего порядков. Такие подходы известны как иерархические [40, 50]. Возможно, наиболее популярной из них является квазинормальная гипотеза Миллионщикова [9]. Самый сильный аргумент против использования этой гипотезы был выдвинут Огурой [47], который показал, что в некоторых случаях она приводит к отрицательному спектру энергии.

Другой версией иерархической техники является предположение локальной независимости, которое устанавливает связь, с одной стороны, между четвертыми моментами, с другой - между первыми и третьими. Это предположение в общем случае оказалось некорректным, а в тех случаях, когда оно корректно, результаты такие же, как при использовании техники возмущений [27]. Для обзора других методик можно обратиться к работе Лакса [40].

Совершенно другим путем пошел Винер [3], который применил к случайным функциям идею Вольтерра [4] о представлении непрерывного функционала в виде ряда степенных функционалов от некоторой базисной функции. Он использовал в качестве базисной функции процесс броуновского движения, точнее, его производную - так называемый "белый шум".

Камерон и Мартин [34] привели ряд к ортогональному виду с помощью многомерных полиномов Эрмита от "белого шума".Метод был назван разложением Винера - Эрмита и применен для ряда стохастических задач систем идентификации [58]. Сигал и др. [51] вывели уравнения для эволюции ядер функционалов Винера в модельном случае бюргерсовой турбулентности. В последующих работах эти авторы получили ряд результатов, но в итоге эволюция ядер оказалась неустойчивой. Это вызвало необходимость ренормализации [43], что уменьшило изначальную привлекательность метода.

Теперь установлено, что в случае нелинейных систем метод Винера - Эрмита сталкивается с большими трудностями, причина которых лежит в его основе - применении в качестве базисной функции гауссовского "белого шума". Третьи моменты последнего равны нулю, и обрезанная на третьих моментах конечная версия уравнений для ядер оказывается квазилинейной, хотя исходная система нелинейна. В результате такой строгий метод оказался недостаточно эффективным, поскольку рассматривается усеченная версия бесконечной системы для ядер. Проще говоря, гауссовское распределение процессов броуновского движения является суперпозицией эффектов очень плотно расположенных мелкомасштабных неоднородностей, в то время как в вышеупомянутых примерах размеры одиночных структур существенно больше среднего расстояния между ними. Несмотря на недостатки, подход Винера - Эрмита наметил корректный путь для строгой трактовки стохастических систем. Естественное развитие метода функциональных рядов требует внести как можно больше информации о системе в базисную функцию, чтобы приблизить усеченный ряд к искомому решению. В связи с этим можно обратиться к работе [19], где вводится "совершенный белый шум", трехточечная корреляция у которого есть дельта-функция Дирака второго порядка. Эта случайная функция применялась в качестве базисной для бюргерсовой турбулентности, и были получены результаты без ренормализации [52].

Интересно отметить, что частный случай "совершенного белого шума" представляет из себя пуассоновский случайный процесс.Первым замену гауссовского "белого шума" пуассоновским процессом сделал Огура [46], который сконструировал ортогональные функционалы Винера

для этого случая и получившемуся ряду дал название ряд Пуассона - Винера, не обсуждая его применения.

Применение метода Пуассона - Винера для задач нелинейной стохастики началось с работы Христова [52], в которой была развита необходимая техника, а объектом исследования была бюргерсова турбулентность. Им же введена маркированная точечная случайная функция переменной x, которая имеет вид

$$\varphi(x)=\sum_{\alpha}K(x-x_{\alpha};u_{\alpha})=\int_{R}\int_{U}K(x-\xi;u)\omega(\xi;u)d^{3}\xi d^{\mu}u;$$

$$\omega(x;u)=\sum_{\alpha}\delta(x-x_{\alpha})\delta(u-u_{\alpha}),\quad -\infty\leqslant\alpha\leqslant\infty,$$

Здесь x_{α} - положение центра объекта в пространстве; $u\in U$- μ - мерный вектор, называемый маркером. Величины x_{α} и u_{α} случайны. Функция ω называется маркированной случайной функцией плотности, статистические свойства которой, а следовательно, и функции φ полностью определяются характеристиками системы маркированных случайных точек $\{x_{\alpha}\}$. Поскольку в большинстве практически важных случаев отсутствует детальная информация о физических процессах, приводящих к созданию среды со случайной структурой, появляется необходимость как-то аппроксимировать статистику точечной случайной функции. Довольно общие физические закономерности отражают так называемые случайные функции типа "совершенного беспорядка". Пусть вероятность нахождения k объектов в бесконечно малых окрестностях геометрических позиций x_k одновременно с тем, чтобы маркер каждого из них находился в бесконечно малой окрестности величины u_k, есть

$$dP=f_{k}(x_{1},\ldots,x_{k};u_{1},\ldots,u_{k})P_{k}(u_{1},\ldots,u_{k})d^{3}x_{1}\ldots d^{\mu}u_{k},$$

где P_k - многоточечная плотность вероятности маркера. Тогда для маркированных случайных функций, когда нет ограничений на перекрытие объектами друг друга, определение "совершенного беспорядка", предложенное в [56], имеет вид:

$$P_{n}(u_{1},\ldots,u_{n})=P_{1}(u_{1})\ldots P_{1}(u_{n});$$

$$f_{n}(x_{1},\ldots,x_{n};u_{1},\ldots,u_{n})=\gamma^{n},$$

где γ - среднее число точек в единице объема. В этом случае ω является маркированной пуассоновской точечной случайной функцией, и ее статистика значительно проще общего случая маркированной точечной случайной функции.

Функция φ может рассматриваться как усеченный ряд типа Пуассона - Винера [46]

$$F[\omega;x]=K_{0}(x)C_{\omega}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R}\ldots\int_{U}\ldots\int K^{(n)}(x-x_{1},\ldots,x-x_{n};$$

$$u_{1},\ldots,u_{n})C_{\omega}^{(n)}(x_{1},\ldots,x_{n};u_{1},\ldots,u_{n})d^{3}x_{1}\ldots d^{3}x_{n}d^{\mu}u_{1}\ldots d^{\mu}u_{n}.$$

Здесь $C_{\omega}^{(n)}$ - обобщенные полиномы Шарлье; $K^{(n)}$ - неслучайная функция, называемая ядром. Важным свойством этого ряда является его вириальность: n-й член ряда добавляет в значение какой-либо осредненной характеристики величину порядка γ^n, что позволяет строить асимптотически строгие приближения для $\gamma<1$ [52].

В работах [20, 52, 55] метод применялся для решения уравнений Бюргерса, Лоренца, Курамото - Сивашинского (стекающих пленок), и приводилось сравнение с прямыми численными расчетами. Аппроксимация точечными случайными функциями решений этих нелинейных уравнений привела к адекватному перегруппированию статистической информации, и уже первое приближение ряда Пуассона - Винера удовлетворительно описало случайные режимы.

Христовым и Нартовым [10, 12, 13] получены решения такого вида для двумерных уравнений типа Навье-Стокса и рассчитаны крупномасштабные характеристики плоского слоя смешения, хорошо согласующиеся с данными экспериментов. В работах [11, 14, 23] исследовалось поведение когерентных структур в МГД-течениях.

Точечная структура решений неустойчивых систем объясняется тем, что тривиальное решение в окрестности критических значений параметров неустойчиво, а одновременно с этим сами возмущения (структуры) устойчивы, и условия появления следующей структуры восстанавливаются только после того, как предыдущая затухает. При увеличении закритических значений параметров возникает вторичная неустойчивость, в случайных точках первичной структуры появляются вторичные структуры, и т.д. В качестве примера здесь можно привести вторичные структуры на тороидальном вихре [39] и вторичные структуры в слое смешения [28].

Следует заметить, что для осредненных характеристик турбулентности большое значение имеют первичные структуры, даже при очень больших сверхкритических значениях параметров. Так, в ряде турбулентных течений примерно половина касательных рейнольдсовых напряжений относится к первичным когерентным структурам. Роль вторичных, третичных и т.п. структур можно параметризовать путем соответствующего осреднения.

Использование точечных случайных функций для моделирования реальной турбулентности имеет свои трудности, связанные со сложностью граничной задачи для многих переменных [53] . В некоторых случаях к более простой задаче приводит замена системы Навье-Стокса вариационной гипотезой. Для турбулентных режимов эта идея была реализована Христовым [21], который сформулировал для них принцип наименьшей диссипации в течении Пуазейля с заданным перепадом давления. В работе [22] в качестве пробных функций авторы использовали пуассоновские точечные случайные функции. При закритических значениях числа Рейнольдса нетривиальное решение для ядра K было получено, однако максимальное значение средней скорости оказалось примерно в два раза меньше, чем в эксперименте Конт-Белло [8]. В [57] этот аппарат применяли для течения в трубе.

В настоящей работе для достижения лучшего согласования с экспериментом в модель включается требование выполнения интегрального закона равенства порождения и диссипации, который является следствием уравнений Навье-Стокса. Кроме того, вводится подгоночный коэффициент, чтобы компенсировать отсутствие в постановке задачи третьего измерения.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Переход к турбулентности в плоском течении Пуазейля всегда был важной проблемой теории гидродинамической устойчивости. С помощью энергетического метода Рейнольдс [49] получил первое теоретическое предсказание потери устойчивости в этом течении. Первые эксперименты были сделаны Девисом и Уайтом [29], а последние высококачественные эксперименты - Карницем и др. [36] , Нишиока и др. [45].

Энергетический метод усовершенствовался Орром [48], который получил граничную задачу для возмущений. Этот подход практически был оставлен, когда Зоммерфельд [32] воспользовался самими уравнениями Навье-Стокса для исследования эволюции возмущений. Он поставил граничную задачу, которая несущественно отличалась от задачи Орра. Впоследствии метод Зоммерфельда применяли многие авторы (см. библиографию в [54]), которые решали уравнение Орра-Зоммерфельда разными приближенными способами.

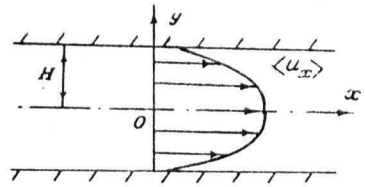


Рис. 1. Геометрия плоского течения Пуазейля

Общей идеей этих подходов является то, что в качестве возмущений используются гармонические функции времени. В настоящей работе исследования основываются на идее, что в случае закритических чисел Рейнольдса устанавливается режим, описываемый точечной случайной функцией. Естественно такой режим искать в области малых закритических чисел Рейнольдса, когда система точек, генерирующих такую функцию, может быть достаточно разреженной.

Еще одним ограничением будет двумерность возмущений. В этом случае можно ввести функцию тока $\psi(x,y,t)$ (рис. 1) согласно формулам $u_x=\partial\psi/\partial y$, $u_y=-\partial\psi/\partial x$, где u_x, u_y - соответствующие компоненты скорости. Система Навье-Стокса тогда сводится к одному уравнению для функции тока

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=\nu\Delta(\Delta\psi), \qquad (1)$$

где $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; ν - кинематическая вязкость. Решение (1) будем искать в виде

$$\psi=K_0(y)+\iiint_{-\infty}^{\infty}K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)C_\omega^{(1)}(\xi,\tau;c)d\xi d\tau dc$$

или

$$\psi=K_0(y)+\sum_\alpha K_1(x-x_\alpha(t),y,t-t_\alpha;c_\alpha),\quad c_\alpha\equiv\dot{x}_\alpha(t),\qquad (2)$$

$$-\infty<\alpha<\infty,$$

т.е. ψ является обобщенной точечной случайной функцией координаты x и неслучайной функцией координаты y. От времени t ядро K_1 зависит двояко: это движение вдоль оси ox со скоростью c_α и возникновение, достижение максимума при $t=t_\alpha$, затухание. Следовательно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\sum_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial t}K_1(x-x_\alpha,y,t-t_\alpha;c_\alpha)-\dot{x}_\alpha(t)\frac{\partial K_1}{\partial x}\right]=$$

$$=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)-c\frac{\partial}{\partial x}K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)\right]\times \qquad (3)$$

$$\times C_\omega^{(1)}(\xi,\tau;c)d\xi d\tau dc.$$

В (2) присутствуют скорость движения центров структур $c_\alpha\equiv\dot{x}_\alpha(\tau)$ и пополином Шарлье от маркированной точечной функции типа совершенного беспорядка [20]

$$\omega(\xi,\tau;c)=\sum_\alpha\delta(\xi-x_\alpha)\delta(\tau-t_\alpha)\delta(c-c_\alpha).$$

Ясно, что в рассматриваемой задаче нет другого маркера кроме фазовой скорости структуры c, так как в уравнении (2) отсутствуют параметры, которые могли бы внести случайность (вязкость ν постоянна).

Пусть γ - среднее число структур на единице площади oxt, тогда $\langle\omega(\xi,\tau;c)\rangle=\gamma$. Запишем свойства полиномов Шарлье для данного конкретного случая [20]:

$$\langle C_\omega^{(1)}(\xi,\tau;c)\rangle=0;$$

$$\langle C_\omega^{(1)}(\xi_1,\tau_1;c_1)C_\omega^{(1)}(\xi_2,\tau_2;c_2)\rangle=\gamma P(c_1)\times$$

$$\times\delta(\xi_1-\xi_2)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(c_1-c_2);$$

$$\langle C_\omega^{(1)}(\xi_1,\tau_1;c_1)C_\omega^{(1)}(\xi_2,\tau_2;c_2)C_\omega^{(1)}(\xi_3,\tau_3;c_3)\rangle=$$

$$=\gamma P(c_1)\delta(\xi_1-\xi_2)\delta(\xi_1-\xi_3)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_1-\tau_3)\times$$

$$\times\delta(c_1-c_3)\delta(c_1-c_2).$$

Подставляя (2) в (I) и осредняя, получаем уравнение для K_0:

$$\gamma\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial y}K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)\frac{\partial}{\partial x}\Delta K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)\frac{\partial}{\partial y}\Delta K_1(x-\xi,y,t-\tau;c)\right]\times \qquad (4)$$

$$\times P(c)d\xi d\tau dc=\nu\frac{d^4K_0}{dy^4}.$$

Подставим $\partial\psi/\partial t$ из (3) в (I). Следуя схеме идентификации ядер [20], умножим (I) после подстановки туда (2) на $C_\omega^{(1)}(0,0;c)$, осредним и получим уравнение для K_1:

$$\gamma P(c)\left[\frac{\partial\Delta K_1}{\partial t}-c\frac{\partial\Delta K_1}{\partial x}+\frac{dK_0}{dy}\frac{\partial\Delta K_1}{\partial x}-\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{d^3K_0}{dy^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial K_1}{\partial y}\frac{\partial\Delta K_1}{\partial x}-\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial\Delta K_1}{\partial y}\right]=\gamma P(c)\nu\Delta(\Delta K_1). \qquad (5)$$

Граничными условиями для K_0 являются условия прилипания на стенке $(y=\pm H)$:

$$\frac{\partial K_0}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial K_0}{\partial y}=0. \qquad (6)$$

Первое из этих условий удовлетворяется за счет того, что K_0 зависит только от y. Необходимы еще два условия для получения решения: пусть при $y=H$

$$K_0=0; \qquad (7)$$

$$\tau_\mu=\mu\frac{d^2\langle\psi\rangle}{dy^2}\equiv\mu\frac{d^2K_0}{dy^2}. \qquad (8)$$

Здесь μ - динамическая вязкость.

Условиями для K_1 также будут условия прилипания при $y=\pm H$:

$$K_1=\partial K_1/\partial y=0. \qquad (9)$$

Поскольку функция тока имеет смысл расхода, то значение K_1 на каждой стенке должно быть одинаковым.

Условий по x и t нет, но есть условие ограниченности энергии пульсаций:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial K_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_1}{\partial y}\right)^2\right]P(c)dxdtdc<+\infty.$$

Отсюда с учетом свойств плотности вероятности следует

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial K_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_1}{\partial y}\right)^2\right]dxdt<+\infty. \qquad (10)$$

При естественном предположении гладкости функции K_1 выражение (I0) эквивалентно условиям

$$\Delta K_1=0,\quad K_1=0\quad \text{для}\quad x=\pm\infty;\ t=\pm\infty. \qquad (11)$$

Решить такую задачу трудно, поэтому рассматривали частный случай, когда K_1 не зависит от t, а фазовая скорость структур постоянна. Тогда получаем следующую систему:

$$\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\partial K_1(x-\xi,y)}{\partial y}\,\frac{\partial\Delta K_1(x-\xi,y)}{\partial x}-\frac{\partial K_1(x-\xi,y)}{\partial x}\times$$

$$\times\frac{\partial\Delta K_1(x-\xi,y)}{\partial y}\Big]d\xi=\nu\frac{d^4K_0}{dy^4}; \qquad (12)$$

$$\Big(\frac{dK_0}{dy}-c+\frac{\partial K_1}{\partial y}\Big)\frac{\partial\Delta K_1}{\partial x}-\frac{\partial K_1}{\partial x}\Big(\frac{d^3K_0}{dy^3}+\frac{\partial\Delta K_1}{\partial y}\Big)=\nu\Delta(\Delta K_1). \qquad (13)$$

Для численного решения этой системы применялись разностная схема и алгоритм, описанные ниже, но устойчивое решение не было достигнуто ни при каком значении c. Заметим, что двумерная постановка не дает адекватного описания и при использовании прямого численного метода решения уравнений Навье-Стокса для течения в канале [I5].

3. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕЙ ДИССИПАЦИИ

Из предыдущего раздела следует, что невозможно получить решение системы, в которую входит уравнение для структуры (I3). Поэтому естественно заменить это уравнение другим, полученным на основе вариационной гипотезы.

Интерес к вариационному подходу, развитому Рейнольдсом [49] и Орром [48], в последнее время снова вырос. Малкус [42] предложил принцип максимальной диссипации энергии возмущений средней скорости. Гольдштик [5] сформулировал принцип максимальной устойчивости профиля средней скорости и на его основе рассчитал константу Кармана для плоского течения Пуазейля. Христов [2I] в полуэмпирическом ключе обосновал возможность применения принципа наименьшей диссипации для описания плоского турбулентного течения в канале, а в работе [54] им показано, что на основе этого принципа достаточно достоверно предсказывается нижнее критическое число Рейнольдса перехода к турбулентности в этом течении.

Следует подчеркнуть, что вариационные постановки в турбулентности есть, в действительности, полуэмпирические гипотезы. Их цель обойти трудности решения уравнений Навье-Стокса, которые, как известно, не являются уравнениями Эйлера - Лагранжа каких-либо функционалов [I].

Преимуществом вариационных подходов является простота формулировки граничных задач для возмущений. Например, уравнения Орра [I7] для возмущений не содержат производных по времени, хотя сами возмущения могут быть нестационарными. В [22, 57] для течений в канале и трубе применялся принцип наименьшей диссипации, а класс пробных функций составляли пуассоновские точечные случайные функции. Настоящая работа посвящена развитию этого подхода.

Для плоского течения Пуазейля принцип наименьшей диссипации имеет вид [2I]:

$$\int_{-H}^{H}\Big[\nu\Big(\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big)^2+\varepsilon\Big]dy=\min, \qquad (14)$$

где $\langle u_x\rangle$ - средняя скорость; а ε - плотность диссипации турбулентных пульсаций. Функционал (I4) минимизируется при ограничении, которым является уравнение Рейнольдса, проинтегрированное по y:

$$\mu\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}=-Ay+\rho\langle u_x'u_y'\rangle, \qquad (15)$$

где $A=-\partial P/\partial x$ - перепад давления, порождающий течение, а $\rho\langle u_x'u_y'\rangle$ - рейнольдсово напряжение.

Для замыкания вариационной задачи (I4)-(I5) необходимо задать связь между ε и $\langle u_x'u_y'\rangle$. В работе [2I] такой связью является формула Колмогорова для диссипации

$$\varepsilon=\frac{4}{3}\,\frac{\langle u_x'u_y'\rangle^{3/2}}{l}. \qquad (16)$$

Уравнения Эйлера - Лагранжа тогда сводились к одному уравнению, которое в ядре течения давало формулу Прандтля [24]

$$\tau=l^2\Big(\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big)^2. \qquad (17)$$

Верно также, что если профиль средней скорости связан с напряжением по формуле Прандтля (I7), то полная диссипация в течении будет минимальна, если, конечно, справедлива формула Колмогорова (I6).

Необходимо проверить практически, действительно ли диссипация турбулентного режима для течения в канале меньше "ламинарной". Для этого уравнение (I5) умножим на $d\langle u_x\rangle/dy$ и проинтегрируем по y от $-H$ до H

$$\int_{-H}^{H}\Big\{\nu\Big(\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big)^2-\langle u_x'u_y'\rangle\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big\}dy=-\int_{-H}^{H}Ay\,\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\,dy.$$

Если теперь правую часть проинтегрировать по частям с учетом граничных условий для $\langle u_x\rangle$, а ко второму члену в левой части применить следствие уравнений Навье-Стокса - равенство порождения турбулентной энергии суммарной диссипации турбулентных пульсаций, то полная диссипация в канале оказывается пропорциональной расходу жидкости через сечение канала

$$\int_{-H}^{H}\Big[\nu\Big(\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big)^2+\varepsilon\Big]dy=A\int_{-H}^{H}\langle u_x\rangle dy.$$

Если привести это уравнение к безразмерному виду, разделив обе части на $u^{*3}H^{-1}$, где u^* - динамическая скорость $(u^*=\sqrt{AH})$, то получим

$$\frac{H}{u^{*3}}\int_{-H}^{H}\Big[\nu\Big(\frac{d\langle u_x\rangle}{dy}\Big)^2+\varepsilon\Big]dy=\overline{\mathrm{Re}}.$$

Здесь $\overline{\mathrm{Re}}$ - число Рейнольдса по расходу жидкости через сечение канала

$$\overline{\mathrm{Re}}=\int_{-H}^{H}\frac{\langle u_x\rangle}{\nu}\,dy.$$

Имеет место следующая теорема, доказанная Джозефом. Статистически стационарное турбулентное течение Пуазейля имеет меньший поток массы, чем ламинарное течение Пуазейля с тем же самым градиентом давления. Следовательно, и суммарная диссипация турбулентного течения меньше соответствующей характеристики ламинарного режима.

Согласно экспериментальным данным [29], [44], [36] такая ситуация в реальных течениях может наступить уже при значениях $35<Re<40$ [54]. Рис. 2 из [54] обобщает экспериментальные данные разных авторов и устанавливает связь между числами Рейнольдса по расходу ($\overline{Re}$), максимальной скорости (Re^0) и динамической скорости (Re).

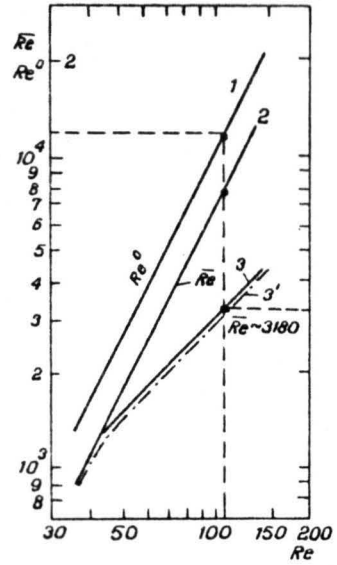


Рис. 2. Обобщение данных экспериментов из работы разных авторов, проведенное Христовым [54]. 3' - расчет на основе принципа наименьшей диссипации. 1, 2 - ламинарный режим, 3, 3' - турбулентный

4. ТОЧЕЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОБНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ДВУМЕРНОСТИ

В предыдущем разделе был приведен пример того, как можно замкнуть вариационную задачу, пользуясь полуэмпирическими соображениями [21], и обоснована целесообразность применения принципа наименьшей диссипации. Оказывается, задачу можно замкнуть по-другому, полагая, что решение для пульсаций является точечной случайной функцией, которая задается выражением (2). Поскольку третья компонента пульсационной скорости не учитывается, то предположим так называемую эффективную двумерность - пропорциональность турбулентной диссипации в трехмерном течении диссипации в плоскости x,y. Тогда, учитывая (2), получаем

$$D_T \equiv \nu \int_{-H}^{H} \{2[\langle(\frac{\partial u'_x}{\partial x})^2\rangle+\langle(\frac{\partial u'_y}{\partial y})^2\rangle+\langle(\frac{\partial u'_z}{\partial z})^2\rangle]+\langle(\frac{\partial u'_y}{\partial x}+\frac{\partial u'_x}{\partial y})^2\rangle+$$

$$+\langle(\frac{\partial u'_z}{\partial y}+\frac{\partial u'_y}{\partial z})^2\rangle+\langle(\frac{\partial u'_x}{\partial z}+\frac{\partial u'_z}{\partial x})^2\rangle-\frac{2}{3}\langle(\frac{\partial u'_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_y}{\partial y}+ \qquad (18)$$

$$+\frac{\partial u'_z}{\partial z})^2\rangle\}dy=\frac{2\nu}{æ}\int_{-H}^{H}[\langle(\frac{\partial u'_x}{\partial x})^2\rangle+\langle(\frac{\partial u'_y}{\partial y})^2\rangle+\frac{1}{2}\langle(\frac{\partial u'_x}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u'_y}{\partial x})^2\rangle]dy=\frac{2\nu}{æ}\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)\ [2(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x\partial y})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2})^2+$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2})^2-\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2}]dxdtdcdy,$$

где $æ\leqslant 1$ - коэффициент пропорциональности. Напряжение Рейнольдса выражается формулой

$$\langle u'_x u'_y\rangle=-\gamma\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}P(c)dxdtdc. \qquad (19)$$

Видно, что в определение D_T и $\langle u'_x u'_y\rangle$ не входят явно производные по времени t и зависимость от фазовой скорости структуры c.

Подставим, соответственно, (18) и (19) в (14) и (15), учитывая, что $\langle u_x\rangle=u_0=dK_0/dy$. Тогда получим замкнутую вариационную задачу с ограничением для определения u_0 и K_1:

$$D=\int_{-H}^{H}\{\nu(\frac{du_0}{dy})^2+\frac{2\gamma\nu}{æ}\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)[2(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x\partial y})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2})^2]dxdtdc\}dy=\min; \qquad (20)$$

$$\nu\frac{du_0}{dy}=-Ay-\gamma\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}dxdtdc. \qquad (21)$$

Добавим еще ограничение - интегральный закон равенства порождения суммарной диссипации, который, как упоминалось выше, является следствием уравнений Навье-Стокса:

$$\int_{-H}^{H}[\langle u'_x u'_y\rangle\frac{du_0}{dy}+\varepsilon]dy=0. \qquad (22)$$

После подстановки сюда (18) и (19) получим

$$\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\{-\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}\frac{du_0}{dy}+\frac{2\nu}{æ}[2(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x\partial y})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2})^2+ \qquad (23)$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2})^2-\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2}]\}\gamma P(c)dxdtdcdy=0.$$

Будем учитывать ограничения (21) и (23) с помощью неопределенных множителей Лагранжа λ и λ_1. Тогда функционал, который будет минимизироваться, принимает вид:

$$J=\int_{-H}^{H}\{\nu(\frac{du_0}{dy})^2+\nu\lambda(y)\frac{du_0}{dy}+\gamma\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)[\frac{4\nu}{æ}(\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y})^2+$$

$$+\frac{\nu}{æ}(\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K_1}{\partial y^2})^2+\lambda(y)\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}\frac{du_0}{dy}+ \tag{24}$$

$$+\lambda_1[\frac{4}{æ}(\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y})^2+\frac{\nu}{æ}(\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K_1}{\partial y^2})^2]]dxdtdc\}dy.$$

5. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА - ЛАГРАНЖА

Уравнения Эйлера - Лагранжа, полученные в результате варьирования функционала (24) по параметрам $\partial K_1/\partial x$, $\partial K_1/\partial y$, u_0, приводятся к виду:

$$2\nu(\frac{\partial^3K_1}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3K_1}{\partial y^3})\frac{(1+\lambda_1)}{æ}-\frac{\partial K_1}{\partial x}(\lambda-\lambda_1\frac{du_0}{dy})=0; \tag{25}$$

$$2\nu(\frac{\partial^3K_1}{\partial x^3}-\frac{\partial^3K_1}{\partial y^2\partial x})\frac{(1+\lambda_1)}{æ}+\frac{\partial K_1}{\partial y}(\lambda-\lambda_1\frac{du_0}{dy})=0; \tag{26}$$

$$2\nu\frac{d^2u_0}{dy^2}+\nu\frac{d\lambda}{dy}-\lambda_1\gamma\frac{d}{dy}\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}dxdtdc=0. \tag{27}$$

К этим уравнениям надо присовокупить (21) и (23) для определения множителей Лагранжа. Проинтегрируем (27) по y. Из соображений симметрии константу интегрирования положим равной нулю. Тогда

$$\lambda(y)=-2\frac{du_0}{dy}+\frac{\lambda_1}{\nu}\gamma\iiint_{-\infty}^{\infty}P(c)\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}dxdtdc. \tag{28}$$

Умножим (25) на $\partial K_1/\partial y$, (26) на $-\partial K_1/\partial x$, сложим эти уравнения и проинтегрируем в пределах всей области. Все члены, которые находятся в дивергентном виде, будут равны нулю из-за нулевых граничных условий для $\partial K_1/\partial x$ и $\partial K_1/\partial y$ (формула (9)). Тогда имеем:

$$\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\{[-4\nu(\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y})^2-4\nu(\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y})^2-2\nu(\frac{\partial^2K_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2})^2]\times$$

$$\times\frac{(1+\lambda_1)}{æ}-2\frac{\partial K_1}{\partial y}\frac{\partial K_1}{\partial x}(\lambda-\lambda_1\frac{du_0}{dy})\}dxdtdcdy=0. \tag{29}$$

Подставим сюда найденное значение λ из (28) и разделим обе части на 2. Учитывая (21), получим

$$\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\{[-4\nu(\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y})^2-\nu(\frac{\partial^2K_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2})^2]\frac{(1+\lambda_1)}{æ}+$$

$$+\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}[2(1+\lambda_1)\frac{du_0}{dy}+\frac{\lambda_1}{\nu}Ay]\}dxdtdcdy=0. \tag{30}$$

Потребуем выполнения ограничения (23). Для этого вместо диссипативного члена в (30) (первый член) подставим его значение из (23). Получим

$$\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\{\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}[(1+\lambda_1)\frac{du_0}{dy}+\frac{\lambda_1}{\nu}Ay]\}dxdtdcdy=0. \tag{31}$$

Отсюда следует уравнение для определения λ_1:

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}=-\frac{\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}\frac{du_0}{dy}dxdtdcdy}{\int_{-H}^{H}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{Ay}{\nu}\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}dxdtdcdy}. \tag{32}$$

Обратимся вновь к уравнениям Эйлера - Лагранжа (25) и (26), куда подставим значение λ из (28). Дифференцируя (25) по y, а (26) по x и вычитая одно уравнение из другого, получим

$$\frac{2\nu}{æ}\Delta(\Delta K_1)+2\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y}[2\frac{du_0}{dy}+\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)}\frac{Ay}{\nu}]+$$

$$+\frac{\partial K_1}{\partial x}[2\frac{d^2u_0}{dy^2}+\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)}\frac{A}{\nu}]=0$$

или

$$\nu\Delta(\Delta K_1)=-æ[(2\frac{du_0}{dy}+\frac{LAy}{\nu})\frac{\partial^2K_1}{\partial x\partial y}+(\frac{d^2u_0}{dy^2}+\frac{L}{2}\frac{A}{\nu})\frac{\partial K_1}{\partial x}], \tag{33}$$

где $L=\lambda_1/(1+\lambda_1)$ определяется по (32).

Уравнения (21), (32) и (33) образуют систему для определения u_0 и K_1. Эта система значительно проще системы (4)-(5), полученной в разделе 2, так как не содержит производных по времени, однако она остается в известном смысле незамкнутой, поскольку из (33) невозможно определить явной зависимости от времени, а в (21), (32) присутствует интегрирование по времени. То же относится и к параметру c. Этой ситуации можно избежать, если предположить, что K_1 допускает "разделение переменных"

$$K_1(x,y,t;c)=K(x,y)F(t)G(c). \tag{34}$$

Тогда

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial K_1}{\partial y}P(c)dxdtdc=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y}dx, \tag{35}$$

где

$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}G^2(c)P(c)dc.$$

Итак, к принципу наименьшей диссипации добавлена еще одна полуэмпирическая гипотеза (34)-(35). Очевидно, что есть ситуация, когда (35) выполняется тождественно. Это будет в случае, когда K не зависит от t, и все структуры неподвижны, т.е. $P(c)=\delta(c)$. В общем случае величина α остается произвольной.

После подстановки (35) в (21) имеем

$$\nu \frac{du_0}{dy} = -Ay - \alpha\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} dx.$$

Тогда (32) примет вид:

$$L = -\int_{-H}^{H} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} \frac{du_0}{dy} dxdy \left[\int_{-H}^{H} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ay}{\nu} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} dxdy \right]^{-1}, \tag{36}$$

а в уравнении (33) надо просто заменить K_1 на K:

$$\nu \Delta\Delta K = -æ\left[\left(2 \frac{du_0}{dy} + \frac{LAy}{\nu}\right) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} + \left(\frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{LA}{2\nu}\right) \frac{\partial K}{\partial x} \right]. \tag{37}$$

Удобно ввести следующие безразмерные переменные

$$\psi = (K/u^*)\sqrt{\alpha\gamma/H}; \quad y' = y/H; \quad x' = x/H; \quad u' = u^*/u_0;$$

$$\mathrm{Re} = u^* H/\nu; \quad L' = L\mathrm{Re}^{-1}, \tag{38}$$

где $u^* = (AH)^{1/2}$ – динамическая скорость. Здесь нет опасности перепутать символ ψ с употребляемым в (1), (2), так как K_1 имеет смысл функции тока определенной структуры. Окончательный вид системы (штрихи для x, y, L и u опущены):

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta(\Delta\psi) = -æ\left[\left(2 \frac{du}{dy} + Ly\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{L}{2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]; \tag{39}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{du}{dy} = -y - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx; \tag{40}$$

$$L = -\frac{\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{du}{dy} dxdy}{\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} y dxdy}. \tag{41}$$

Граничные условия, которые обсуждались выше, имеют вид:

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = \pm 1; \tag{42}$$

Условие ограниченности энергии пульсаций (10):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx < +\infty. \tag{43}$$

6. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА И РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Алгоритм решения задачи (39)-(41) несущественно отличается от приведенного в [22]. Так же вводится преобразование координаты x, "сжимающее" бесконечный интервал $[-\infty, \infty]$ в конечный $[-1, 1]$:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{B} \right); \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = cx(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}; \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = cx(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} cx(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{46}$$

где $cx(\eta) = \frac{2}{\pi B} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$; B – константа.

Исходная граничная задача заменяется следующей:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta\Delta\psi = -æ cx(\eta) \left[\left(2 \frac{du}{dy} + Ly\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial y} + \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{L}{2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]; \tag{47}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{du}{dy} = -y - \int_{-1}^{1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} d\eta; \tag{48}$$

$$L = -\frac{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{du}{dy} d\eta dy}{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} y d\eta dy}; \tag{49}$$

при $y = \pm 1$ $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$; при $\eta = \pm 1$ $\psi = 0$, $\partial^2\psi/\partial\eta^2 = 0$. (50)

В уравнении (47) обозначено

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + cx(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} cx(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Второе условие (50) является следствием предположения об ограниченности и гладкости функции ψ. Уравнение (47) разбивается на два введением "вихря" ω и добавляется фиктивное время t:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Delta\omega = \mathrm{Re}\, cx(\eta) æ \left[\left(2 \frac{du}{dy} + Ly\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial y} + \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{L}{2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]; \tag{51}$$

$$\Delta\psi = -\omega. \tag{52}$$

Вместо второго условия (50) можно принять

$$\eta = \pm 1: \quad \psi = 0; \quad \omega = 0. \tag{53}$$

Область, в которой проводится расчет – полуканал $0 \leqslant y \leqslant 1$. На оси канала ставятся условия симметрии

$$\partial\psi/\partial y = \partial\omega/\partial y = 0, \quad y = 0. \tag{54}$$

Заметим, что нечетного по y решения для ψ и ω не существует, поскольку система уравнений при замене y на $-y$ сохраняет свой вид. Обращение к половине канала облегчит расчеты. Соответственно, интегрирование по y в (49) должно производиться в пределах от 0 до 1.

Сетка по направлению η принимается равномерной и согласованной с шагом $h_\eta = 1/(M-1)$, где M – число точек в интервале [0, 1]. Тогда

$$\eta_j = jh_\eta \quad \text{для} \quad j = -M, \ldots, 0, \ldots, M. \tag{55}$$

Очевидно, что $\eta_{-M}=-1$ и $\eta_M=1$. Сетка в направлении y строится неравномерной, учитывающей поведение решения в пристеночной области и ядре течения:

$$y_i=1-\frac{(N-i)/N+q}{c_M}\{\exp[\frac{N-i}{N}\ln(\frac{c_M}{1+q}+1)]-1\}, \tag{56}$$

$$h_i=y_i-y_{i-1},\quad i=1,\dots,N;\quad y_0=0,\quad y_N=1.$$

Принимается $q=0,4$, а c_M используется для управления сеткой при изменении числа Рейнольдса так, чтобы в вязкий подслой $(0\leqslant(1-y)\leqslant 5\mathrm{Re}^{-}$ попадало не менее пяти точек. В частности, для варианта Re=2210 c_M=100, а для Re=32,5 c_M=5. При этом N=80.

Составляющие дифференциального оператора Δ аппроксимируются следующим образом:

$$\Lambda_{yy}\psi=\frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})}\psi_{i+1,j}-\frac{2}{h_ih_{i-1}}\psi_{i,j}+ \tag{57}$$

$$+\frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})}\psi_{i-1,j}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+O(h_ih_{i-1});$$

$$\Lambda_{\eta\eta}\psi=cx(\eta_j)[(cx(\eta_{j+1})+cx(\eta_j))(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j})-(cx(\eta_j)+cx(\eta_{j-1}))\times$$

$$\times(\psi_{i,j}-\psi_{i,j-1})]/(2h_\eta^2)=cx(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}cx(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+O(h_\eta^2). \tag{58}$$

Алгоритм решения задачи заключается в выполнении на каждом слое по фиктивному времени четырех счетных циклов.

I. Считая известными значения u^n, ψ^n, L^n, с помощью схемы стабилизирующей поправки [26] определяем ω^{n+1}:

$$\frac{\omega^{1/2}-\omega^n}{\tau}=\Lambda_{\eta\eta}\omega^{1/2}+\Lambda_{yy}\omega^n+F_\omega^n; \tag{59}$$

$$\frac{\omega^{n+1}-\omega^{1/2}}{\tau}=\Lambda_{yy}(\omega^{n+1}-\omega^n),$$

для $j=-M+1,\dots,0,\dots,M-1$; $i=1,\dots,N-1$.

Здесь

$$F_\omega^n=-\mathrm{Re}\,cx(\eta_j)[2(\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{h_{i+1}+h_i}+L^ny_i)\times$$

$$\times\frac{\psi_{i+1,j+1}^n+\psi_{i-1,j-1}^n-\psi_{i-1,j-1}^n-\psi_{i+1,j-1}^n}{2h_\eta(h_i+h_{i-1})}+\frac{\psi_{i,j+1}^n-\psi_{i,j-1}^n}{2h_\eta}\times \tag{60}$$

$$\times(\frac{2u_{i+1}^n}{h_i(h_i+h_{i-1})}-\frac{2u_i^n}{h_ih_{i-1}}+\frac{2u_{i-1}^n}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})})+\frac{L}{2})].$$

На первом полушаге используется граничное условие на бесконечности

$$\omega_{i,M}^{1/2}=0;\quad \omega_{i,-M}^{1/2}=0. \tag{61}$$

На втором полушаге на оси канала условие симметрии аппроксимируется со вторым порядком точности:

$$\omega_{0,j}^{n+1}=\omega_{1,j}^{n+1}. \tag{62}$$

Как известно, явного условия для вихря на твердой стенке не существует, зато есть два условия для функции тока ψ (см. (50)). В настоящей работе для вихря выбрано классическое условие Тома [18] с параметром релаксации $(3/2)h_{N-1}$, который был выбран в процессе проведения численных экспериментов. Тогда

$$\omega_{N,j}^{n+1}=-\frac{2\psi_{N-1,j}^n}{h_{N-1}^2}\frac{3}{2}h_{N-1}+(1-\frac{3}{2}h_{N-1})\omega_{Nj}^n. \tag{63}$$

2. Считая ω^{n+1} известным, можно ввести второе фиктивное время в уравнение для ψ и снова использовать схему стабилизирующей поправки

$$\frac{\psi^{1/2}-\psi^{n+1,s}}{\sigma}=\Lambda_{\eta\eta}\psi^{1/2}+\Lambda_{yy}\psi^{n+1,s}+\omega^{n+1};$$

$$\frac{\psi^{n+1,s+1}-\psi^{1/2}}{\sigma}=\Lambda_{yy}(\psi^{n+1,s+1}-\psi^{n+1,s}). \tag{64}$$

Оптимальный итерационный параметр σ=0,I находится из обработки результатов численных экспериментов. Итерирование здесь проводится до до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$\frac{\max\limits_{ij}|\psi_{i,j}^{n+1,s+1}-\psi_{i,j}^{n+1,s}|}{\max\limits_{ij}|\psi_{i,j}^{n+1,s+1}|}\leqslant 0,001. \tag{65}$$

Далее полагается $\psi^{n+1}\equiv\psi^{n+1,s+1}$. Граничное условие на первом полушаге

$$\psi_{i,M}^{1/2}=\psi_{i,-M}^{1/2}=0, \tag{66}$$

а на втором

$$\psi_{0,j}^{n+1,s+1}=\psi_{1,j}^{n+1,s+1};\quad \psi_{N,j}^{n+1,s+1}=0. \tag{67}$$

3. После получения ψ^{n+1} из (48) определяется профиль скорости u по схеме, которая обеспечивает второй порядок точности

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{h_{i+1}}=-\frac{1}{2}(y_{i+1}+y_i)-\frac{1}{2}\sum_{j=-M+1}^{M-1}(\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1}-\psi_{i,j-1}^{n+1}}{2}+$$

$$+\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1}-\psi_{i+1,j-1}^{n+1}}{2})\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n+1}}{h_{i+1}}. \tag{68}$$

Сумма в правой части (68) означает, что интеграл аппроксимируется по формуле трапеций. Расчет начинается с $i=N-1$, причем задается условие $u_N=0$.

4. Для определения параметра L из (49) числитель в правой части (49) рассчитывается по формуле трапеций, которая с учетом того факта, что подынтегральная функция равна нулю на границах, имеет вид:

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{du}{dy}\,d\eta dy \approx \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=-M+1}^{M-1} \frac{\psi^{n+1}_{i,j+1}-\psi^{n+1}_{i,j-1}}{2} \times \frac{\psi^{n+1}_{i+1,j}-\psi^{n+1}_{i-1,j}}{h_{i+1}+h_i}\,\frac{u^{n+1}_{i+1}-u^{n+1}_{i-1}}{2}. \tag{69}$$

Знаменатель выражения в правой части (49) определяется аналогично (69). Итерации по фиктивному времени начинаются с условий:

$$u^0=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(1-y^2);$$

$$\psi^0=10^{-A}(1-y^2)\left[1+\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right]^{-4} \tag{70}$$

и продолжаются до такого n, для которого удовлетворяются критерии сходимости:

$$\frac{\max\limits_i|u_i^{n+1}-u_i^n|}{\max\limits_i|u_i^{n+1}|}\leqslant 0{,}001\tau; \tag{71}$$

$$\frac{\max\limits_{ij}|\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^n|}{\max\limits_{ij}|\omega_{ij}^{n+1}|}\leqslant 0{,}001\tau. \tag{72}$$

Точность алгоритма проверялась при расчете варианта Re=100 на последовательности сеток:

а) $M=20$, $N=40$; б) $M=20$, $N=80$;

в) $M=40$, $N=80$.

Относительная разница между решениями на сетках а) и б) равна 8,1 %, а между б) и в) - 2,3 %. Сетка б) выбиралась для расчетов как наиболее оптимальная.

7. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИИ И ПОЯВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО ДИССИПАЦИЮ

Из уравнения энергии пульсаций следует, что для достаточно малых Re в силу знакоопределенности диссипативного члена эта характеристика будет убывать со временем. Максимальное значение Re, при

котором это будет происходить, называется нижним критическим числом Рейнольдса ($\mathrm{Re}_{кр}$). Подход Орра [48] к определению этого числа заключается в варьировании функционала (22), а возмущения отыскиваются в классе гармонических волн, причем направление волнового вектора совпадает с направлением скорости основного потока. Получено $\mathrm{Re}_{кр}=9{,}3$. Наименьшее значение $\mathrm{Re}_{кр}=7$ получается тогда, когда волновой вектор ортогонален скорости основного потока [6]. Близким к результату Орра оказалось $\mathrm{Re}_{кр}=10$, полученное в [22] на основе принципа наименьшей диссипации. В качестве возмущений здесь использовались точечные случайные функции, не зависящие (как у Орра) от третьего измерения. Эта модель является частным случаем модели, применяемой в настоящей работе, соответствующим $æ=1$, $L=0$. Возможная причина отличия от экспериментальных значений $35<\mathrm{Re}_{кр}<40$ (см. раздел 3) заключается в том, что функции, минимизирующие функционал, не являются решениями системы Навье-Стокса.

Теоретические подходы, рассматривающие $\mathrm{Re}_{кр}$ как функцию от амплитуды возмущений, дают завышенную оценку $\mathrm{Re}_{кр}=60-100$ [54].

Наиболее близкое к экспериментальному значение $\mathrm{Re}_{кр}=35{,}7$ получено в [44] на основе гипотезы Линя [41] о том, что обратный переход наступает тогда, когда диссипация ламинарного течения равна порождению турбулентных пульсаций. На это указано в [54].

Очевидно, что граничная задача (39)-(43) всегда имеет тривиальное решение $\psi\equiv 0$, поэтому вызывает интерес исследование бифуркации решения с увеличением числа Рейнольдса. С этой целью было сконструировано начальное возмущение (70) с изменяющейся амплитудой. При этом $A=0$ приближенно соответствует возмущению с конечной амплитудой, а $A=15$ представляет собой практический порог бесконечно малых возмущений.

Следует отметить, что значение свободного параметра $æ$, входящего в уравнение (39), бралось во всех случаях равным 0,205. Ниже будет показано, что при таком значении $æ$ профиль средней скорости хорошо согласуется с экспериментальным.

Численные расчеты показали, что для $\mathrm{Re}<32$ даже возмущение с максимальной амплитудой затухает, в то время как при $\mathrm{Re}>53{,}7$ нетривиальное решение появляется при всех значениях A из указанного интервала. Между двумя числами лежит область, в которой нетривиальное решение развивается только при достаточно большой амплитуде начального возмущения. Например, если Re=47,5, нетривиальное решение имеет место, когда $A\leqslant 3$, в то время как для $A>3$ существует лишь тривиальное решение.

Конечно, $\mathrm{Re}_{кр}=32$ не является нижним критическим числом в обычном смысле, так как бифуркация здесь не есть бифуркация на периодическом решении и время - фиктивный параметр. Однако это число находится близко к указанному интервалу $35<\mathrm{Re}_{кр}<40$. Существенным является тот факт, что при переходе через критическое число Рейнольдса для бесконечно близких к нему значений решение имеет конечную амплитуду (рис. 3).

Поскольку минимизируется диссипация, интересно сравнить полную диссипацию стохастического режима течения с соответствующей харак-

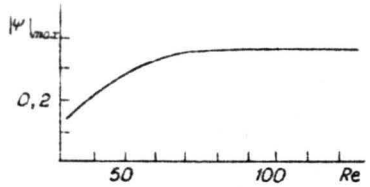


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма

теристикой ламинарного режима. Вспомним соотношения, выведенные в разделе 3:

$$\frac{H}{u^{*3}} D \equiv \frac{H}{u^{*3}} \int_{-H}^{H} [\nu (\frac{d\langle u_x \rangle}{dy})^2 + \varepsilon] dy = \overline{\mathrm{Re}} = \int_{-H}^{H} \frac{\langle u_x \rangle}{\nu} dy = \mathrm{Re} \int_{-1}^{1} u' dy'. \qquad (73)$$

Можно показать, что в полуканале

$$\frac{\nu}{u^{*4}} D = \int_0^1 u' dy' = \frac{1}{2} \frac{\overline{\mathrm{Re}}}{\mathrm{Re}}. \qquad (74)$$

В ламинарном течении с профилем скорости $u' = \frac{\mathrm{Re}}{2}(1-y'^2)$ эта характеристика равна Re/3. Диссипации двух режимов течения при разных числах Re приведены на рис. 4. Видно, что диссипация стохастического течения становится меньше диссипации ламинарного при значении Re≈32, которое совпадает с рассчитанным нижним критическим числом. Другими словами, стохастический режим диссипирует меньше, чем ламинарный, с самого своего появления. Становится ясно, что стохастический режим имеет право на существование, и его появление согласуется с принципом наименьшей диссипации. Следовательно, этот принцип способен предсказать разрушение ламинарного течения между двумя пластинами и явление перехода к турбулентности.

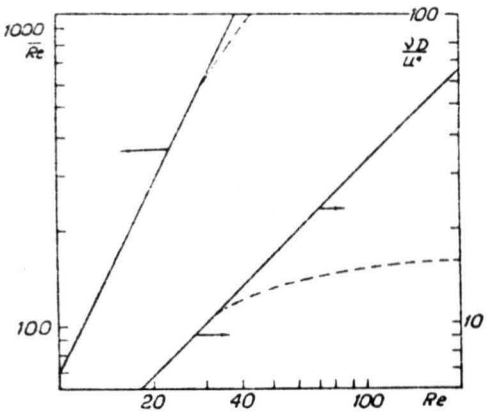


Рис. 4. Зависимость числа Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}$ и полной диссипации в сечении канала от числа Re, определенного по перепаду давления; —— ламинарный режим, - - - - турбулентный

Достоверность рассчитанной характеристики $\nu u^{*-4} D(\mathrm{Re})$ на рис. 4 подтверждается прохождением ее через точку Re=107,5, $\nu u^{*-4} D \approx 15$, которая соответствует верхнему критическому числу Re и отвечающему ему числу Рейнольдса по расходу $\overline{\mathrm{Re}}$, полученным в эксперименте Карница и др. [36]. Как отмечено в [54], значение Re=107,5 очень хорошо соответствует результату линейной теории устойчивости, которая в условиях ламинарного профиля скорости дает критическое число Рейнольдса по расходу $\overline{\mathrm{Re}}$, совпадающее со значением, полученным по формуле

$$\overline{\mathrm{Re}} = \frac{2}{3} \mathrm{Re}^2. \qquad (75)$$

Эта формула является следствием (74) и предположения о ламинарном характере течения.

На рис. 2 и 4 приведены также зависимости $\overline{\mathrm{Re}}$ от Re, которые в ламинарном течении определяются соотношением (75). Видно, что начиная с критического значения Re, кривая для турбулентного режима проходит ниже, чем для ламинарного. Это объясняется меньшим расходом через поперечное сечение при турбулентном режиме. Рис. 2 демонстрирует согласие расчета с данными экспериментов (кривые 3 и 3').

Вызывает интерес единичная структура пульсационной функции тока, которая возникает при значениях Re, близких к критическому - 32,5 (рис. 5). Для сравнения на рис. 6 показана структура при большом числе Рейнольдса Re=2270, которое соответствует числу $\overline{\mathrm{Re}}$=57000 из эксперимента Конт-Белло. Эта структура значительно уже полученной при числе Re, близком к критическому (см. рис. 5).

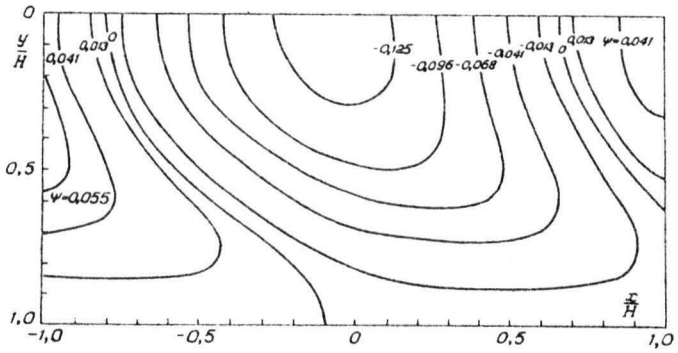


Рис. 5. Фрагмент единичной структуры пульсационной функции тока; Re=32,5

Прежде чем перейти к рассмотрению характеристик турбулентного течения, необходимо сделать несколько замечаний, касающихся интерпретации полученных результатов. Настоящая модель позволяет предсказывать турбулентные режимы течения в области закритических чисел Re. Однако значительным ограничением для применимости полученных здесь результатов является предположение о двумерности. Оно, возможно, справедливо в непосредственной близости от стенки - там, где зарождается стохастический режим. В этом смысле структура, изображенная на рис. 6, есть не что иное, как "выброс" в вязком и логарифмическом слоях. Введение эффективной двумерности в разделе 4 означает попытку компенсировать отсутствие третьего измерения с помощью одного свободного параметра. Тогда рассчитанная двумерная структура должна трактоваться как средняя по оси oz двумерная срезка трехмерной структуры. Кроме того, вследствие (34)-(35) амплитуда когерентной структуры и скорость ее движения вдоль оси ox остают-

ся произвольными, хотя полученные структуры стационарны. Это дает определенные возможности при моделировании мгновенной картины течения и при сравнении со структурами, полученными методом фазового осреднения.

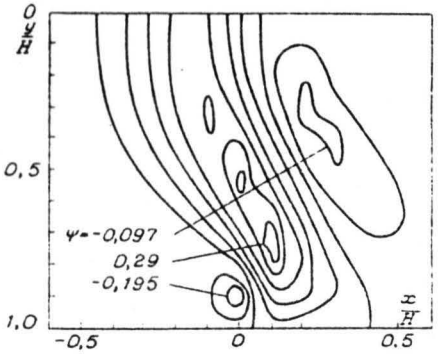


Рис. 6. Единичная структура пульсационной функции тока; Re=2210,

Для течения Пуазейля, где реальные структуры сугубо трехмерны, известны данные по идентификации отдельных сечений или срезок из [33]. На рис. 7 показано одно сечение для y^+=I2,9 ($y^+=(1-y)\mathrm{Re}$ - расстояние от стенки, обезразмеренное с помощью комплекса $\nu^{-1}u^*$). Хотя сравнение с результатом расчета является качественным, оно не бесплодно из-за сходства измеренных и предсказанных соотношений между амплитудами в положительных и отрицательных частях структуры, а также за счет соотношения между размерами областей, в которых структура положительна и отрицательна. Эти соотношения не зависят от абсолютного значения масштабов структур. В эксперименте данные по горизонтальному масштабу отсутствуют.

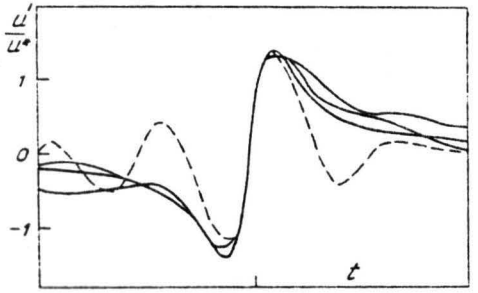


Рис. 7. Структура пульсационной скорости в сечении y^+=12,9; - - - - расчет, ———-эксперимент Йохансона и Альфредсона

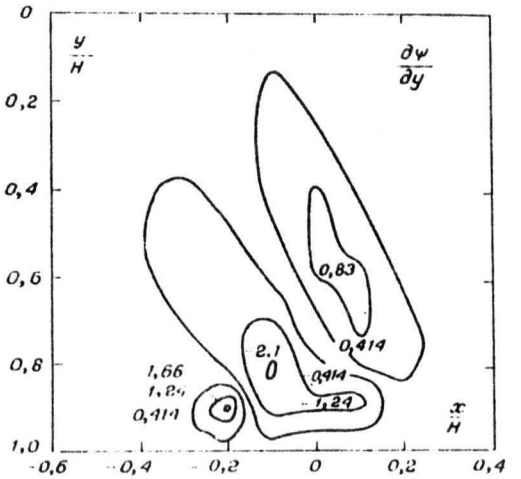
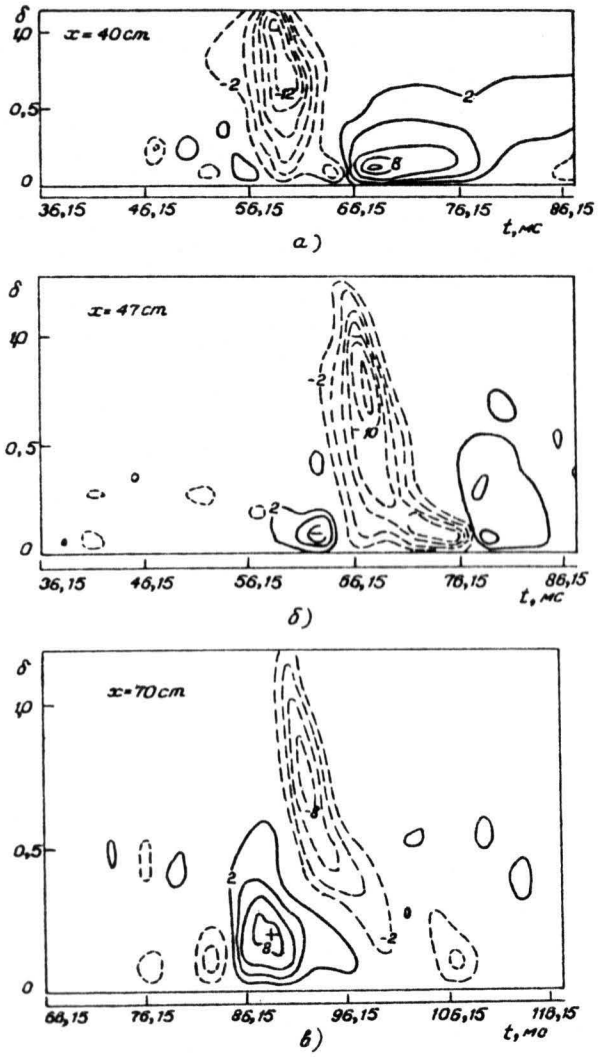


Рис. 8. Единичная структура продольной пульсационной скорости

Структура продольной пульсационной скорости $\partial\psi/\partial y$ приведена на рис. 8. Она состоит из трех частей, причем в центральной части пульсационная скорость имеет знак, обратный знаку средней скорости. Экспериментальные измерения пространственных конфигураций крупных вихрей в канале пока неизвестны, но для пограничного слоя они приведены в [3I]. Методом фазового осреднения исследована эволюция двумерных срезок структуры продольной пульсационной скорости при движении вихря в направлении потока (рис. 9), а также изменение их вдоль оси oz при фиксированном значении x=70 см (рис. I0). Практически во всех ситуациях срезки структур имеют характерную форму, приведенную на рис. 9, *д*, которая хорошо согласуется с расчетной (см. рис. 8).

На рис. 9 и I0 видно, что центральную часть структур поочередно занимают пульсации разного знака, но преимущественно - отрицательная пульсация скорости. Это соответствует расчету, поскольку структура на рис. 8 трактуется как осредненная по z и времени двумерная срезка.

"Трейную" форму имеет и пульсация вертикальной скорости $-\partial\psi/\partial x$, представленная на рис. II.



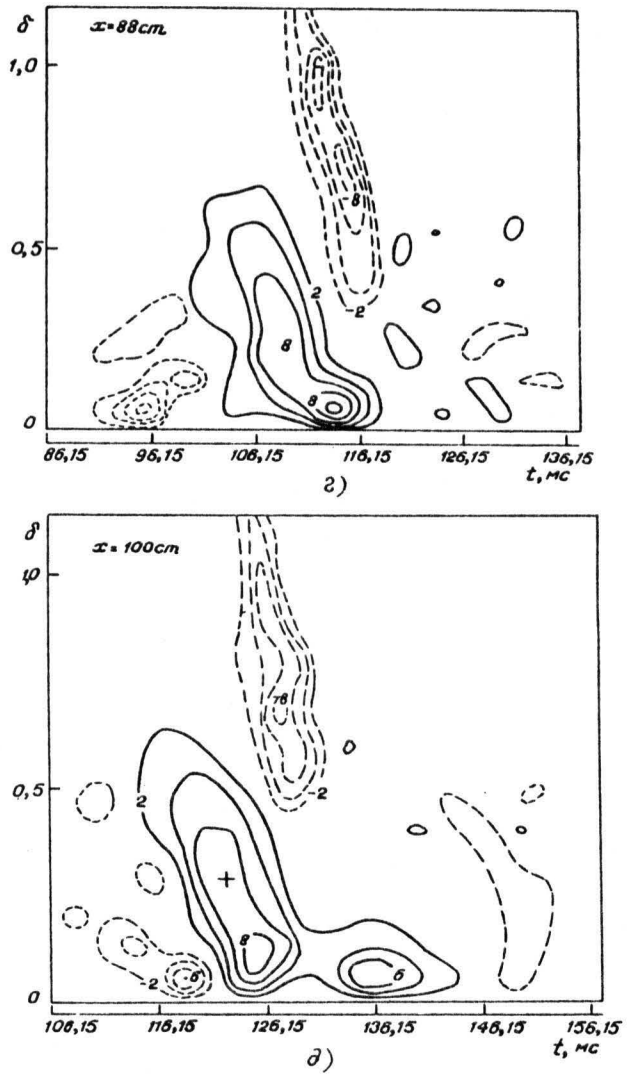
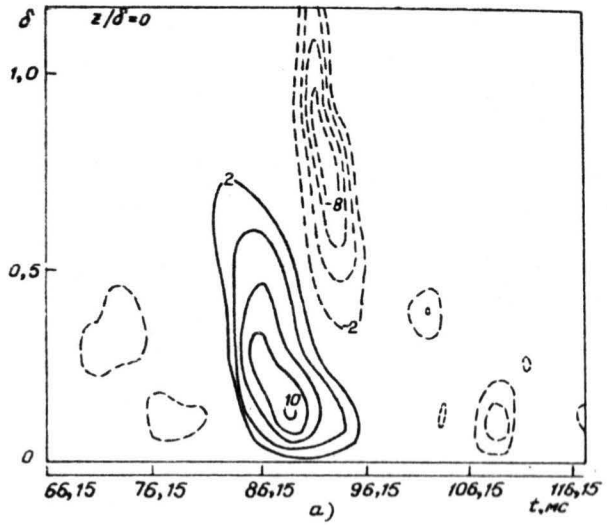
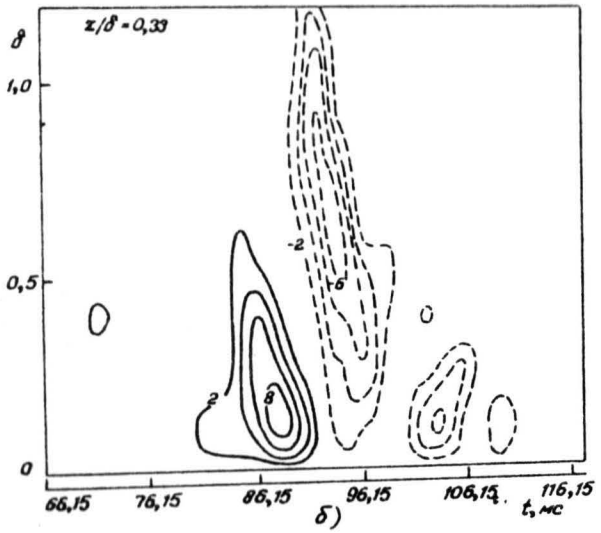
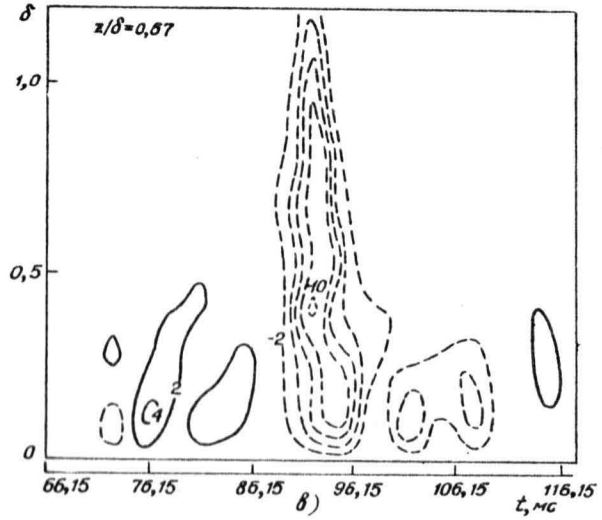


Рис. 9. Единичные структуры пульсационной продольной скорости на разных расстояниях по потоку в пограничном слое на пластине [31]. δ - толщина слоя вытеснения







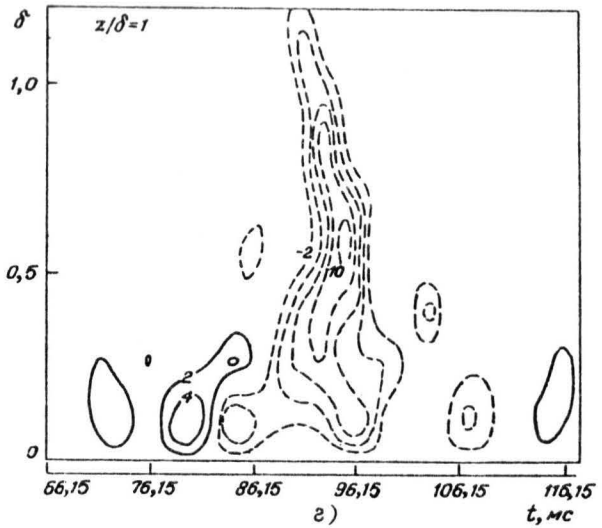


Рис. 10. Единичные структуры пульсационной продольной скорости на разных расстояниях по оси oz (эксперимент Зильбермана, Вигнански и Каплана)

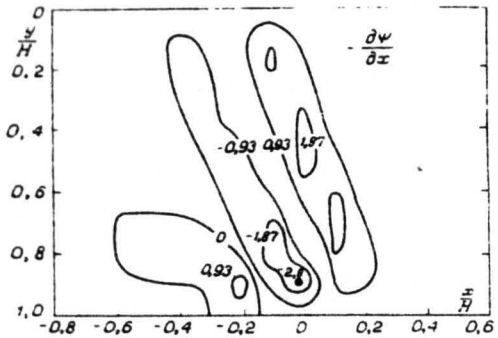


Рис. 11. Единичная структура поперечной пульсации скорости

8. СТАТИСТИКА ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ (СРАВНЕНИЕ С ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ)

Результаты расчетов сравнивали с экспериментальными данными из работ [8, 25, 38] (рис. I2-I5). Расчетный профиль средней скорости при Re=22I0 (рис. I2) очень хорошо согласуется с экспериментальным профилем в пристенной области $y^+ < 12$ и в ядре течения $y < 0{,}9$. Такое согласование достигнуто отчасти благодаря подбору значения æ=0,205. Некоторое различие, однако, обнаруживается в переходной области и логарифмическом слое $12<y^+<200$. На рис. I2, *а* приведен профиль средней скорости из работы [22], в которой æ=I, L=0. Этот профиль значительно отличается от экспериментального в ядре течения. В разделе 7 отмечалось, что выбор æ=0,205 обусловлен хорошим согласованием с экспериментальными данными о нижнем критическом числе Рейнольдса.

На рис. I3, *а* показана эволюция касательных рейнольдсовых напряжений с ростом Re. При Re=22I0 налицо количественное согласование с экспериментом, во всяком случае, в вязком подслое и ядре течения.

Из рис. I4 следует, что интенсивность поперечных пульсаций количественно согласуется с экспериментальной в вязком подслое, переходной области и ядре течения при $y<0{,}8$.

Интенсивность продольных пульсаций скорости (рис. I5) согласуется с данными эксперимента [38] в пристенной области. В ядре течения эта характеристика отличается существенно, поскольку принимает нулевое значение на оси канала. Последнее является неизбежным следствием двумерной постановки задачи и условия $\partial\psi/\partial y=0$ на оси канала.

Вызывают интерес корреляции различных компонент скорости (здесь x', y', t' - размерные переменные):

$$æ_{uu}(\Delta x') \equiv \langle u'_x(x',y',t')u'_x(x'+\Delta x',y',t')\rangle =$$
$$= \alpha\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K(x',y')}{\partial y'} \frac{\partial K(x'+\Delta x',y')}{\partial y'}\, dx' =$$
$$= u^{*2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \frac{\partial\psi(x+\Delta x,y)}{\partial y}\, dx; \qquad (76)$$

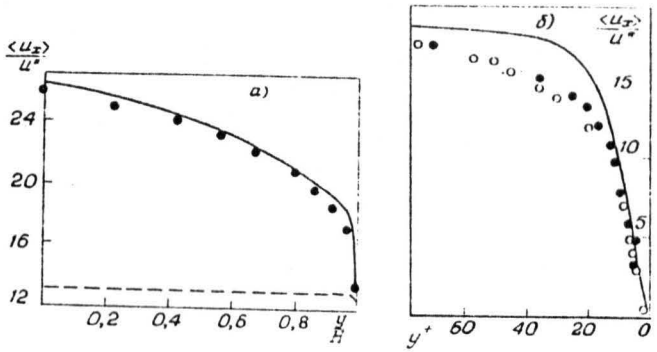


Рис. 12. Профиль средней скорости в ядре течения (*а*) и в пристенной области (*б*). • - [8]; о - [25]; —— - настоящий расчет; - - - - расчет [22]

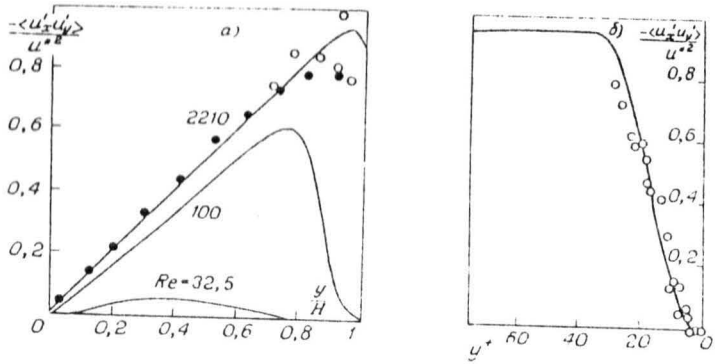


Рис. 13. Касательное рейнольдсово напряжение в ядре течения (*а*) и вблизи стенки (*б*) при Re=2210 (обозначения см. на рис. 12)

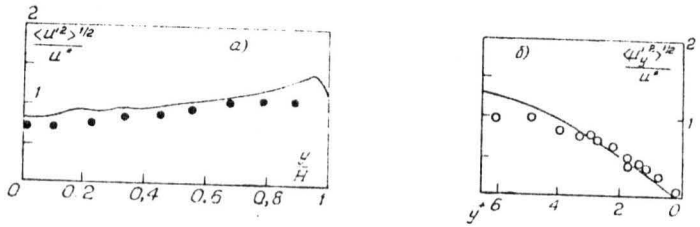


Рис. 14. Интенсивность поперечных пульсаций скорости в ядре течения (*а*) и вблизи стенки (обозначения см. на рис. 12)

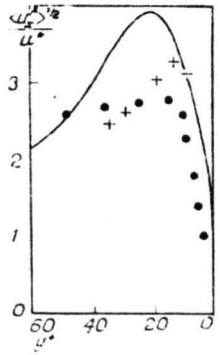


Рис. 15. Интенсивность продольных пульсаций скорости вблизи стенки. + - эксперимент Кларка; остальные обозначения см. рис. 12

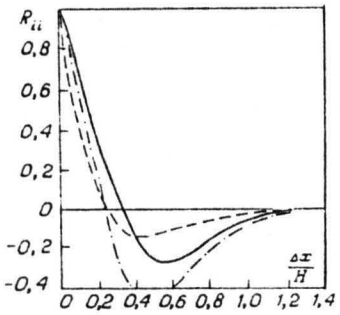


Рис. 16. Двойные пространственные корреляции: —— $R_{uu}(\Delta x)$, Re=2210 (расчет); —·—·— $R_{vv}(\Delta x)$, Re=2210 (расчет); - - - $R_{uu}(\Delta z)$, Re=4210 (эксперимент Конт-Белло)

$$æ_{vv}(\Delta x')\equiv\langle u_y'(x',y',t')u_y'(x'+\Delta x',y',t')\rangle=$$
$$=\alpha\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K(x',y')}{\partial x'}\,\frac{\partial K(x'+\Delta x',y')}{\partial x'}\,dx'= \qquad (77)$$
$$=u^{*2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\,\frac{\partial\psi(x+\Delta x,y)}{\partial x}\,dx.$$

На рис. 16 представлены коэффициенты корреляции

$$R_{uu}(\Delta x)=æ_{uu}(\Delta x)/æ_{uu}(0);$$

$$R_{vv}(\Delta x)=æ_{vv}(\Delta x)/æ_{vv}(0)$$

для y/H=0,89, т.е. в пристенной области. К сожалению, такие данные для Re=2210 ($\overline{Re}$=57000) в [8] отсутствуют, однако $R_{uu}(\Delta x)$ измерена в случае Re=4210 ($\overline{Re}$=120000). Поведение этой характеристики носит монотонный характер, в то время как рассчитанные зависимости $R_{uu}(\Delta x)$ и $R_{vv}(\Delta x)$ немонотонны. Здесь же приведена корреляция $R_{uu}(\Delta z)$ из эксперимента, которая ведет себя немонотонно в качественном согласии с рассчитанной корреляцией $R_{uu}(\Delta x)$. Этому не следует удивляться, поскольку предположение эффективной двумерности (18) связывает производные от пульсационных скоростей по z с производными по x и y и, возможно, немонотонный характер корреляции R_{uu} переносится с z - направления на x - направление.

На основе корреляций R_{uu} и R_{vv} с помощью преобразования Фурье рассчитаны одномерные спектры энергии пульсаций (рис. 17). В эксперименте [8] эти характеристики вблизи стенки отсутствуют. В ядре

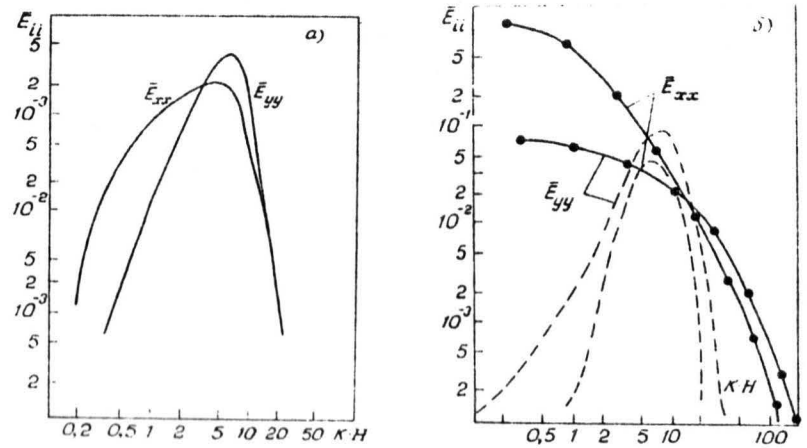


Рис. 17. Спектры энергии продольных и поперечных пульсаций $\overline{E}_{ii}=E_{ii}/(u^{*2}H)$
а - y/H=0,89; б - y/H=0,55, - - - - расчет, ◆ эксперимент Конт-Белло

течения при y=0,55 расчет удовлетворительно описывает эксперимент в энергосодержащей области (см. рис. 17, б). Относительно быстрое убывание в области больших волновых чисел качественно согласуется с данными экспериментов по двумерной турбулентности [7].

9. Заключение

Применяемый в настоящей работе вычислительный двумерный подход, основанный на принципе наименьшей диссипации, содержит лишь один свободный параметр.

Для течения Пуазейля в канале с заданным перепадом давления рассчитаны:

- нижнее критическое число Рейнольдса, хорошо согласующееся с экспериментальными критическими числами:
- бифуркационная диаграмма перехода к турбулентности;
- суммарная диссипация в сечении канала и число Рейнольдса по расходу в зависимости от числа Рейнольдса по динамической скорости;
- профиль средней скорости, касательное рейнольдсово напряжение, интенсивность поперечных пульсаций скорости, количественно описывающие эксперименты;
- интенсивность продольных пульсаций скорости в пристеночной области;
- формы когерентных структур функции тока и компонент скорости, согласующихся со средними по фазе двумерными срезками когерентных структур из эксперимента;
- корреляционные функции и одномерные спектры компонент пульсаций скорости.

Необходимо указать место настоящего подхода среди других методов расчета турбулентных течений в канале.

Диффузионные полуэмпирические модели не позволяют получить тонкую структуру турбулентности. Кроме того, они содержат большое число подгоночных параметров. Так, в модели Джонса - Лаундера [30] для течения в канале используется пять констант и три функции.

Областью применения прямых численных методов являются умеренно закритические числа Рейнольдса. Например, в основополагающей работе Рождественского и Симакина [16] число Рейнольдса по средней скорости порядка 5000.

Основным предположением настоящего подхода, позволившим обойтись одним подгоночным параметром, является гипотеза о точечном случайном характере турбулентных пульсаций. Локализованный характер решения, в свою очередь, дал возможность строить сетку, не испытывая затруднений из-за ограниченности вычислительных ресурсов для двумерных задач при больших числах Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
2. Бэтчелор Д. К. Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
3. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
5. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 182, № 5. С. 1026-1028.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
7. Двумерная турбулентность в МГД экспериментах / Воциш А. Д., Колесников Ю. Б., Лиелаусис О. А., Платниек И. А. // Модели в механ. сплош. среды. Новосибирск, 1979. С. 91-99.
8. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
9. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. С. 611-614, 615-618.
10. Нартов В. П. Стохастический режим в слое смешения. Новосибирск, 1986. 39 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механ.; № 24-86).
11. Нартов В. П., Жиляев М. И. Слой смешения: когерентные структуры в продольном магнитном поле // 12-е Рижское совещание по магнитной гидродинамике: Тез. докл. Саласпилс, 1987. Т. 1. С. 47-50.
12. Нартов В. П., Христов Х. И. Моделирование крупномасштабной структуры точечными случайными функциями // 4-я Междунар. конф. по пограничным и внутренним слоям: Тез. докл. Новосибирск, 1986. С. 92.

13. Нартов В. П., Христов Х. И. Стохастический режим в течениях с медленным изменением структуры в продольном направлении // Моделирование процессов гидродинамики и энергетики. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики. 1985. С. 143.
14. Нартов В. П., Христов Х. И. Структурная турбулентность в МГД течениях // Физическая механика неоднородных сред. Новосибирск . Ин-т теорет. и прикл. механики. 1984. С. 24.
15. Рождественский Б. Л., Приймак В. Г. Численное моделирование двумерной турбулентности в плоском канале. М., 1981. (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики. № 20).
16. Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Нестационарные вторичные течения в плоском канале и устойчивость течения Пуазейля // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 6. С. 1337-1340.
17. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
18. Том А., Эйплт К. Численные расчеты полей в технике и физике. М.: Энергия, 1964.
19. Христов Х. И. Об одном стационарном случайном процессе типа "белого шума" со специальными свойствами // Теоретична и приложна механика. София, 1979. Год X. №1. С. 53-57.
20. Христов Х. И. Механо-математическое моделирование на попрекъснати среди със случайна структура: Дисс. на прис. уч. степ. д-ра мат. наук. - София, 1986.
21. Христов Х. И. Принцип наименьшей скорости диссипации энергии и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 5. С. 1071-1075.
22. Христов Х. И., Нартов В. П. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля // Численное моделирование в динамике жидкости. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики. 1983. С. 124-144. (см. также Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 825-828).
23. Христов Х. И., Нартов В. П., Жиляев М. И. Взаимодействие когерентного течения с продольным магнитным полем. Новосибирск, 1987. 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. механики. № 15-87).
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
25. Экспериментальное исследование пристенных турбулентных течений / С. С. Кутателадзе, Б. П. Миронов, В. Е. Накоряков, Е. М. Хабахпашева. Новосибирск: Наука, 1975.
26. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
27. Adomian G. The closure approximation in the hierarchy equation// J. Stat. Phys. 1971. Vol. 5. P. 127-133.
28. Bernal L. P., Roshko A. Streamwise vortex structure in plane mixing layer // J. Fluid Mech. Vol. 170. P. 499-525.
29. Davies S. J., White C. M. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular crossection // Proc. R. Soc. London. 1928. Vol. A119. P. 92-107.

30. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarisation with two-equation model of turbulence // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 301-314.
31. Zilberman M., Wignanski I., Kaplan R. E. Transition boundary layer spot in fully turbulent environment // Phys. Fluids. 1977. Vol. 20. N 10. Pt. 2. P. 258-271.
32. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flüssigkeitsbedingugen // Attide 4 Congr. Internat. Mat., Roma, 1908, Vol. 3. P. 116-124.
33. Johanson A. V., Alfredson P. H. On the structure of turbulent channel flow // J. Fluid Mech. Vol. 122. P. 295-314.
34. Cameron R. H., Martin W. T. The ortogonal development of non-linear functionals // Ann. Math. 1947. Vol. 48. N 2. P. 385-392.
35. Karman T., Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence // Proc. R. Soc., L. 1938. Vol. A164. P. 192-215.
36. Karnits M. A., Potter M. C., Smith M. An experimental investigation of transition of plane Poiseuille flow // Trans. ASME J. Fluid Mech. 1974. Vol. 96. P. 384-388.
37. Keller L. V., Friedman A. A. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressible Flüssigkeit // Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924. P. 395-405.
38. Clark J. A. A study of incompressible turbulent boundary layer in channel flow // J. of Basic. Eng. - desem. 1968. P. 455-468.
39. Coles D. The uses of coherent structures // AIAA paper. 1985. N 506. P. 1-13.
40. Lax M. D. Approximate solution of random differential and integral equations // Appl. stochastic processes. - New-York: Academic Press, 1980. P. 121-134.
41. Lin S. P. Finite amplitude side-band stability of viscous film // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 63. P. 417-429.
42. Malkus W. V. R. Outline of the theory of turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1. P. 521-539.
43. Meecham W. C. Renormalisation for the Wiener-Hermite representation of statistical turbulence // Turb. Diffus. Environ. Poll, (adv. Geophys., Vol. 18a). New-York, 1974, P. 445-455.
44. Narayan M. A. B., Narayana T. Some studies of transition from laminar in turbulent flow in two-dimensional channel // Ztschr. angew. Math. Phys., 1967. Vol. 18. P. 642-650.
45. Nishioka M., Lida S., Ishikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 72. P. 731-751.
46. Ogura H. Orthogonal functionals of the Poisson process // IEEE Trans. Inf. Theory. 1972. Vol. 18. P. 473-481.
47. Ogura Y. A consequence of zero-forth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 16. P. 33-49.

48. Orr N. McF. The stability or instability of steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part 2. A viscous Liquid // Proc. R. Ir. Acad. 1907. Vol. 27. P. 69-138.
49. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous liquids and the determination of the criterion // IBID. 1886. Vol. A.186. P. 123-164.
50. Richardson J. M. Application of truncated hierarchy techniques // Proc. Symp. in Appl. Math., Amer. Math. Soc. - Providence, 1964. Vol. 16.
51. Siegel A., Imamura T., Meecham W. Wiener-Hermite functional expansion in turbulence with the Burgers model // Phys. Fluids 1963. Vol. 6. P. 1519-1521.
52. Christov C. I. Poisson-Wiener expansion in non-linear stochastic systems // Ann. de L'Univ. de Sofia, Fac. Math. Mech., Livre 2- mecanique. 1981 (1985). T. 75. P. 143-165.
53. Christov C. I. A method for treating the stochastic bifurcation of the plane Poiseuille flow // Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. Math. Mech., Livre 2-macanique. 1982. T. 76. P. 87-113.
54. Christov C. I. Critical discussion on the stability of the plane and circular Poiseuille flows // Bulg. Acad. of Sci. 1982. Vol. 13, N 1. P. 59-64.
55. Christov C. I. On the random point structure of Lorenz attractor // Compte. Rend. Bulg. Acad. of Sci. 1987. Vol. 40. N 4. P. 35-38.
56. Christov C. I., Marcov K. Z. Stochastic functional expansion for random media with perfectly disordered constitution // SIAM J. Appl. Math. 1985. Vol. 45. N 2. P. 289-311.
57. Christov C. I., Nartov V. P. On a bifurcation and emerging of a stochastic solution in variational problem for Poiseuille flows // Laminar-turbulent transition, IUTAM symp., Springer, 1985. P. 228-232.
58. Schetzen M. The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. - New-York: John WiLey, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Вводные замечания об аппроксимации точечными случайными функциями стохастических режимов в неустойчивых детерминированных системах..... 5
2. Неустойчивость плоского течения Пуазейля. Постановка задачи об устойчивости к стохастическим возмущениям..... 9
3. Принцип наименьшей диссипации..... 12
4. Точечные случайные пробные функции. Предположение эффективной двумерности..... 14
5. Уравнения Эйлера - Лагранжа..... 16
6. Алгоритм расчета и разностная схема..... 18
7. Численное исследование бифуркации и появления стохастического решения, минимизирующего диссипацию..... 22
8. Статистика плоского течения Пуазейля (сравнение с данными экспериментов)..... 32
9. Заключение..... 35
Литература..... 36

Валерий Петрович Нартов
Христо Иванов Христов

СТРУКТУРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ
И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕЙ ДИССИПАЦИИ
В ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Препринт № 199-89

Редактор Е. Ю. Булавская
Технический редактор Н. А. Ахмерова
Художник В. И. Левинсон

Подписано к печати 23.08.1989. МН 12116
Формат 60x84/16 Объем 3 уч.-изд.л.
Заказ № 549 Тираж 250 экз. Бесплатно

Отпечатано в Институте теплофизики СО АН СССР
630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1